Material N° 01

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 1

UNIDAD: NÚMEROS Y PROPORCIONALIDAD

NÚMEROS ENTEROS

NÚMEROS ENTEROS (Z)

Los elementos del conjunto $\mathbb{Z}$ = { ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...} se denominan **"números enteros".** Algunos subconjuntos de $\mathbb{Z}$ son:

$\mathbb{Z}^+$ = {1, 2, 3, ...} **enteros positivos o naturales.**

$\mathbb{Z}$ = {0, 1, 2, ... } **enteros no negativos o cardinales.**

$\mathbb{Z}^-$ = {-1, -2, -3, ...} **enteros negativos**.

$\mathbb{Z}$ = {0, -1, -2, -3, ...} **enteros no positivos.**

OPERATORIA EN $\mathbb{Z}$

ADICIÓN

- Al sumar números de igual signo, se suman los valores absolutos de ellos conservando el signo común.
- Al sumar dos números de distinto signo, al de mayor valor absoluto se le resta el de menor valor absoluto y al resultado se le agrega el signo del mayor valor absoluto.

MULTIPLICACIÓN

- Si se multiplican dos números de igual signo al resultado es siempre positivo.
- Si se multiplican dos números de distinto signo el resultado es siempre negativo.

OBSERVACIÓN: La división cumple con las reglas de signos de la multiplicación.

EJEMPLOS

1. -2 + (-107) =

A) -109
B) -105
C) 105
D) 109
E) 214

2. (-3) · 3 · (-3) · (-3) · 3 =

A) -243
B) -81
C) -3
D) 81
E) 243

DEFINICIONES: Sea **n** un número entero, entonces:

- El sucesor de n es (n + 1).
- El antecesor de n es (n - 1).
- El entero 2n es siempre par.
- El entero (2n - 1) es siempre impar.
- El entero (2n + 1) es siempre impar.
- El par sucesor de 2n es (2n + 2).
- El par antecesor de 2n es (2n - 2)
- El impar sucesor de (2n + 1) es (2n + 3).
- El impar antecesor de (2n + 1) es (2n - 1).
- El cuadrado perfecto de n es n^2.
- El cubo perfecto de n es n^3.

OBSERVACIONES:

- Son cuadrados perfectos los enteros: 1, 4, 9, 16, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, ...
- Son cubos perfectos los enteros: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ... y también: -1, -8, -27, -64, -125, -216, -343, ...

EJEMPLOS

1. Si **n** es un número natural par, entonces el sucesor par del sucesor de **n + 1** está representado por

   A) n + 2
   B) n + 3
   C) n + 4
   D) 2n + 2
   E) 2n + 4

2. Si **p** es un número entero, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

   I) $(p^2 – 1)$ es el entero antecesor del cuadrado de p.
   II) -(p - 1) es el entero antecesor de p.
   III) $(p + 1)^2$ es el cuadrado del entero sucesor de p.

   A) Sólo I
   B) Sólo III
   C) Sólo I y II
   D) Sólo I y III
   E) I, II y III

PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES

Al operar distintas operaciones a la vez, se debe respetar el siguiente orden:

- Resolver los paréntesis.
- Realizar las potencias.
- Realizar multiplicaciones y/o divisiones de izquierda a derecha.
- Realizar adiciones y/o sustracciones de izquierda a derecha.

EJEMPLOS

1. $-8 + 4 \cdot 3 + 12 : -6 =$

   A) 2
   B) 0
   C) -12
   D) -14
   E) -18

2. $42 - 32 : 2 \cdot 5 =$

   A) -38
   B) -1
   C) 1
   D) 25
   E) 38

3. $3 - \{2 - [1 - (12 : 4 \cdot 3)] - 9\} =$

   A) -16
   B) 2
   C) 4
   D) 10
   E) 18

MÚLTIPLO Y DIVISOR

En la expresión **a = b · c** en que **a**, **b** y **c** son números enteros, **a** es **múltiplo** de **b** y de **c** o bien **b** y **c** son **divisores** o **factores** de **a**.

REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Un número entero es divisible:

Por	Cuando
2	Termina en cifra par.
3	La suma de sus cifras es múltiplo de tres.
4	Las dos últimas cifras forman un número múltiplo de cuatro o bien son ceros.
5	La última cifra es cero o cinco.
6	Es divisible por dos y por tres a la vez.
8	Las tres últimas cifras forman un número múltiplo de ocho o bien son ceros.
9	La suma de sus cifras es múltiplo de nueve.
10	Termina en cero.

EJEMPLOS

1. Si M(n) representa el conjunto formado por todos los números enteros múltiplos de n, entonces {... -18, -9, , 0, 9, 18, ...} corresponde al conjunto

   A) M(3)
   B) M(6)
   C) M(9)
   D) M(18)
   E) □

2. ¿Cuáles de los siguientes números son divisores de 105?

   I) 15
   II) 21
   III) 35

   A) Sólo I y II
   B) Sólo I y III
   C) Sólo II y III
   D) I, II y III
   E) Ninguno de ellos

3. El número 2.856 es el producto de tres factores. Si dos de los factores son 12 y 14, ¿cuál es el otro factor?

   A) 17
   B) 16
   C) 15
   D) 13
   E) Ninguna de las anteriores

NÚMEROS PRIMOS, COMPUESTOS Y DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

- **Números primos:** Son aquellos enteros positivos que tienen sólo dos divisores distintos. Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, …

- **Números compuestos:** Son todos los enteros positivos mayores que uno que no son primos. Los primeros números compuestos son: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22,…

TEOREMA FUNDAMENTAL

Todo número compuesto se puede expresar de manera única como el producto de factores de números primos.

OBSERVACIÓN: $\mathbf{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{n factores}}}$, con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^+$

EJEMPLOS

1. Si **a** es primo, entonces $\mathbf{a^2}$ es necesariamente un número

   A) par
   B) impar
   C) primo
   D) compuesto
   E) par y compuesto

2. Al expresar los números 60 y 90 en factores primos, se obtiene respectivamente

   A) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
   B) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
   C) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
   D) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2^2 \cdot 3 \cdot 5$
   E) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

3. Si $\mathbf{A} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $\mathbf{B} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ y $\mathbf{C} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$, entones ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

   I) 2^3 es un divisor común de **A** y **C**.
   II) **B** es múltiplo de $3^2 \cdot 5$.
   III) $2 \cdot 3^2$ es divisor común de **A**, **B** y **C**.

   A) Sólo II
   B) Sólo III
   C) Sólo II y III
   D) I, II y III
   E) Ninguna de ellas

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Es el menor múltiplo común positivo de dos o más enteros.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

Es el mayor divisor común entre dos o más enteros.

CÁLCULO DEL m.c.m. Y M.C.D MEDIANTE DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Se descomponen los números en factores primos:

- El **m.c.m**. se obtiene como producto de todos los factores primos. En el caso de existir factores primos comunes se considera aquel que posea el exponente mayor.

- El **M.C.D**. se obtiene como producto de los factores primos comunes considerando aquel que posea el exponente menor.

EJEMPLOS

1. El **m·c·m** y **M·C·D** entre $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ y $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ son respectivamente

   A) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ y $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
   B) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ y $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
   C) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ y $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$
   D) $2^3 \cdot 3^3$ y $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
   E) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 11$ y $2^2 \cdot 3^2$

2. Si un niño comienza contando de 5 en 5, y otro lo hace de 6 en 6, ¿en qué número se encuentran por segunda vez?

   A) 15
   B) 30
   C) 45
   D) 60
   E) 75

3. ¿Cuál es la regla de mayor longitud con la que se puede medir exactamente las tres longitudes siguientes: 180 cm, 240 cm y 400 cm?

   A) 8 cm
   B) 12 cm
   C) 20 cm
   D) 24 cm
   E) 40 cm

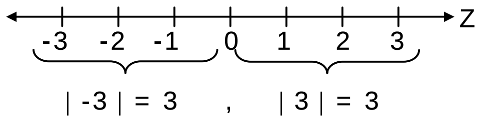
RELACIÓN DE ORDEN EN Z

Si **a** y **b** son números enteros, entonces diremos que:

- $a > b$ si y sólo si $(a - b)$ es un entero positivo.
- $a < b$ si y sólo si $(a - b)$ es un entero negativo.
- $a \geq b$ si y sólo si $(a > b)$ o $(a = b)$; (no ambos a la vez).
- $a \leq b$ si y sólo si $(a < b)$ o $(a = b)$; (no ambos a la vez).

VALOR ABSOLUTO

Es la distancia que existe entre un número y el 0.



DEFINICIÓN: $\boxed{\mathbf{|\,n\,| = \begin{cases} n, & \text{si } n \geq 0 \\ -n, & \text{si } n < 0 \end{cases}}}$

EJEMPLOS

1. Si **a** y **b** son dos enteros consecutivos tales que $a < b$, entonces $b - a$ es

   A) -1
   B) 0
   C) 1
   D) $a^2 + a$
   E) $2a + 1$

2. Si $a < 0$ y $a > -b$, entonces ¿cuál de las siguientes opciones es verdadera?

   A) $a > b$
   B) $-b > -a$
   C) $-a > b$
   D) $b < 0$
   E) $b > a$

3. $|\,12 - 35\,| =$

   A) -23
   B) -13
   C) 13
   D) 23
   E) 47

4. Si $a > b$, entonces $|\,b - a\,| =$

   A) 0
   B) $b - a$
   C) $a - b$
   D) $-a - b$
   E) $a + b$

REGULARIDADES NUMÉRICAS

Las regularidades (patrones) son relaciones entre números, figuras u objetos que pueden describirse por medio de una fórmula o término general. Por ejemplo, en la secuencia 1, 5, 9, 13, ..., cada término se obtiene agregándole 4 al anterior. También es posible encontrar regularidades que dan lugar a diferentes clasificaciones de los números, por ejemplo los llamados "números triangulares":

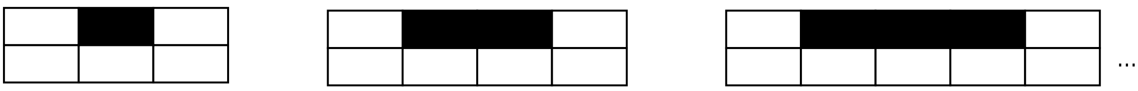
1 3 6 10 15

EJEMPLOS

1. En la siguiente secuencia numérica $1 \cdot 2$, $2 + 3$, $3 \cdot 4$, $4 + 5$,... , el octavo término es

   A) 15
   B) 17
   C) 56
   D) 72
   E) 90

2. La siguiente secuencia de diagramas muestra el número de celdas negras (n) y blancas (b). ¿Cuál es la fórmula que relaciona **n** con **b**?



   A) $b = 5n$
   B) $b = 2n + 3$
   C) $b = n + 4$
   D) $b = n - 4$
   E) $b = 2n + 1$

3. En la siguiente secuencia numérica 3, 7, 15, 31, ..., la suma del quinto con el sexto término es

   A) 63
   B) 94
   C) 127
   D) 190
   E) 318

CUADRADOS MÁGICOS

Los cuadrados mágicos son ordenaciones de números en celdas formando un cuadrado, de tal modo que la suma de cada una de sus filas, de cada una de sus columnas y de cada una de sus diagonales de el mismo resultado.

EJEMPLOS

1. Si se ubican los números 4, 6 y 8 en el cuadrado mágico de la figura 1, de modo que las sumas de cada fila, cada columna y cada diagonal sea 18, con $y < z$, entonces el valor de la expresión $3(x + y) - 2z$ sería

   A) 12
   B) 14
   C) 30
   D) 34
   E) 46

x	y	z
z	x	y
y	z	x

Fig. 1

2. En el cuadrado mágico de la figura 2, formado con los números 1, 2, 3, 4, ..., 15 y 16, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es(son) verdadera(s)?

   I) $x = 4z$
   II) $2x + z = y$
   III) $x + y + z = 19$

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo III
   D) Sólo I y III
   E) I, II y III

16	3	z	13
5	10	11	x
y	6	7	
	15		

Fig. 2

3. En el cuadrado mágico de la figura 3, ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s)?

   I) $1 + a + b + 16 = 34$
   II) $b + c = a + d$
   III) $a + b + c + d = 34$

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo I y III
   D) Ninguna de ellas
   E) Todas ellas

1			4
	a	b	
	c	d	
13			16

Fig. 3

EJERCICIOS

1. $-3^2 - 2^4 =$

   A) -25
   B) -14
   C) -7
   D) 7
   E) 25

2. $5 - \{-2^2 - [16 : (5^2 - 3^3)]\} =$

   A) -7
   B) -3
   C) -1
   D) 1
   E) 17

3. Si **p** es un número entero par y **q** es un número entero impar, entonces ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) **siempre** verdadera(s)?

   I) p^2 un número positivo.
   II) $-q^2$ es un número positivo.
   III) $(p - q)^2$ es un número impar positivo.

   A) Sólo I
   B) Sólo III
   C) Sólo I y III
   D) Sólo II y III
   E) Ninguna de ellas

4. Si **t + 3** es el sucesor del número 10, entonces el sucesor de **t** es

   A) 12
   B) 11
   C) 10
   D) 9
   E) 8

5. ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) divisible(s) por 18?

I) $3^4 \cdot 2^2$
II) $3 \cdot 2^3$
III) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

6. ¿Cuál de los siguientes números no es divisor de $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2$?

A) 7
B) $2^2 \cdot 7^2$
C) $2 \cdot 3 \cdot 7$
D) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
E) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2$

7. A una distribuidora se le solicita un pedido de bebidas de tres tipos diferentes:

Tipo A: 18 bebidas
Tipo B: 45 bebidas
Tipo C: 135 bebidas

Si la embotelladora debe enviar las bebidas en cajas, todas de igual tamaño y con un mismo tipo de bebida, ¿cuántas bebidas deben contener las cajas para que éstas sean el menor número posible?

A) 3
B) 6
C) 9
D) 12
E) 18

8. Dos letreros luminosos se encienden con intermitencias de 42 y 54 segundos respectivamente. Si a las 20 horas y 15 minutos se encuentran ambos encendidos, ¿a qué hora estarán nuevamente ambos encendidos?

A) 20 hr 21 min 18 seg
B) 20 hr 21 min 42 seg
C) 20 hr 21 min 36 seg
D) 20 hr 15 min 54 seg
E) 20 hr 16 min 54 seg

9. En la secuencia: 3, 5, 9, 17,... el número siguiente es

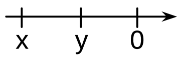
A) 25
B) 26
C) 29
D) 31
E) 33

10. $| (-3)^3 | - | -4^2 | + | 7 | =$

A) -36
B) -4
C) 4
D) 18
E) 50

11. Si al cuadrado de -3 se le resta el cuádruplo de -2 y al resultado se le agrega el triple de 3, se obtiene

A) 44
B) 26
C) 10
D) 8
E) -8

12. Si **x** e **y** son dos números enteros cuyas ubicaciones en la recta numérica es 

, entonces **siempre** se cumple que

A) $xy < 0$
B) $-x : y > 0$
C) $y - x > 0$
D) $x - y > 0$
E) $x + y > 0$

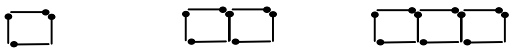
13. Sean **a**, **b**, **c** números naturales tales que a - b = c. Entonces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) **siempre** verdadera(s)?

I) $a < c$
II) $c > b$
III) $b < a$

A) Todas ellas
B) Sólo I
C) Sólo II
D) Sólo III
E) Sólo II y III

14. Los cuadrados de la figura 1, están formados por palos de fósforos tal como se indica en los diagramas. ¿Cuántos palos de fósforos se necesitan para formar el diagrama número 100?

A) 296
B) 297
C) 299
D) 301
E) 304



1 2 3

Fig. 1

15. Si a = -5, entonces $a + |a| - |-a| =$

A) -5
B) -10
C) -15
D) 5
E) 10

16. Dados los cuadrados mágicos de la figura 2, en que las sumas de las filas, las columnas y las diagonales mayores es constante, entonces B – A es

A) -6
B) 6
C) 7
D) 13
E) 20

A	2	3
0	4	8
5	6	1

10	7	22
25	B	1
4	19	16

Fig. 2

17. Sea la suma $x + y + z = w$. Si a cada sumando se le agrega cinco unidades, entonces se obtiene

A) $w + 15$
B) $w + 5$
C) $125w$
D) $15w$
E) $5w$

18. Sea **n** ∈ □ . La expresión $3(1 + n)$ representa un múltiplo de 6 si:

(1) n es un número impar.

(2) $n + 1$ es un número par.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas
D) Cada una por sí sola
E) Se requiere información adicional

19. Si **s** y **t** son números enteros positivos, entonces ¿cuál es el valor de $(s + t) \cdot (s - t)$?

(1) $s = t$

(2) $s = 10$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

20. Sean **a**, **b** y **c** números enteros. ¿Cuál es el menor?

(1) $a - b < 0$

(2) $c - a < 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3	4
1	A	A		
2	C	D		
3	A	A	B	
4	C	D	A	
5	D	B	C	
6	C	D	C	
7	C	E	D	C
8	B	C	D	
9	B	D	E	

CLAVES PÁG. 10

1. A	6. E	11. B	16. B
2. D	7. C	12. C	17. A
3. B	8. A	13. D	18. D
4. D	9. E	14. D	19. A
5. D	10. D	15. A	20. C

DSEMA01