

UNIDAD: GEOMETRÍA

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO - ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

Determinación del plano:

Un plano queda determinado por:

- ♦ Dos rectas que se intersectan (fig. 1).

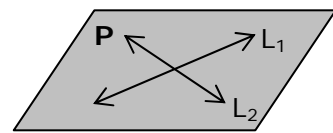


Fig. 1

- ♦ Tres puntos no colineales (fig. 2).

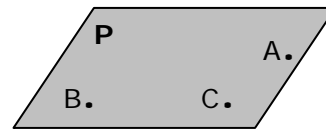


Fig. 2

- ♦ Por una recta y un punto no perteneciente a ella (fig. 3).

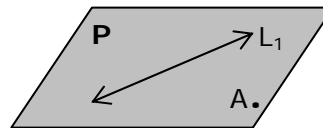


Fig. 3

- ♦ Por dos rectas paralelas (fig. 4).

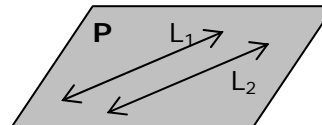


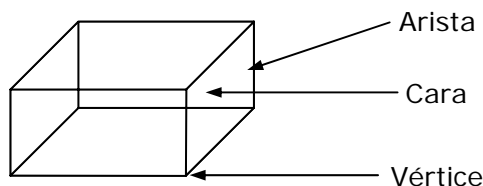
Fig. 4

EJEMPLO

1. ¿Cuál de las siguientes alternativas es falsa?
 - A) Un plano está determinado por una recta y un punto de perteneciente a la recta.
 - B) Un plano está determinado por los cuatro vértices de un cuadrilátero.
 - C) Un plano está determinado por dos rectas perpendiculares.
 - D) Un plano está determinado por dos lados no consecutivos de un rombo.
 - E) Un plano está determinado por los vértices de un triángulo rectángulo.

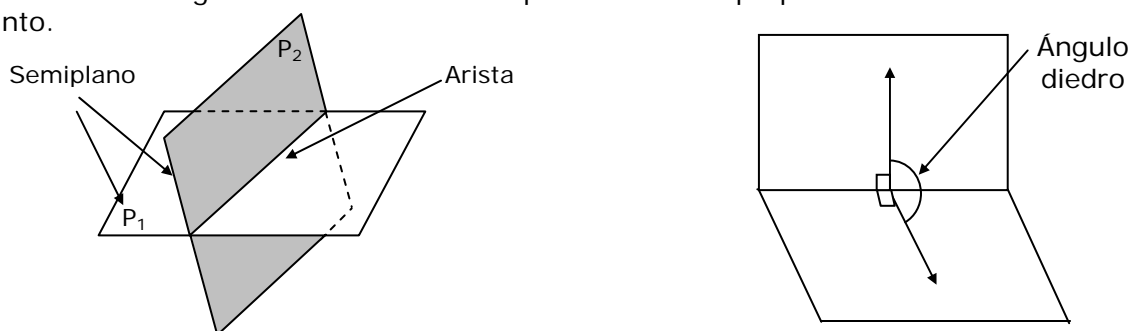
DEFINICIONES

POLIEDRO: Cuerpo limitado por cuatro o más polígonos donde cada polígono se denomina **cara**, sus lados son **aristas** y la intersección de las aristas se llaman **vértices**.



PRISMA: Poliedro limitado por paralelogramo (caras laterales del prisma) y dos polígonos congruentes cuyos planos son paralelos (bases de prisma).

ÁNGULO DIEDRO: Es el ángulo formado por dos semiplanos, que tienen una arista común y su medida es el ángulo rectilíneo formado por dos rectas perpendiculares a la arista en un mismo punto.



EJEMPLOS

1. ¿Cuánto mide el ángulo diedro formado por los planos P_1 y P_2 que se cortan perpendicularmente en la figura 1?

- A) 30°
- B) 45°
- C) 54°
- D) 90°
- E) 108°

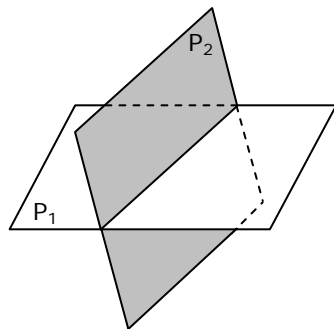


Fig. 1

2. ¿Cuánto mide el ángulo diedro formado por las caras laterales del prisma de la figura 2, cuya base es un pentágono regular?

- A) 30°
- B) 45°
- C) 54°
- D) 90°
- E) 108°

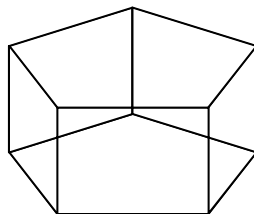
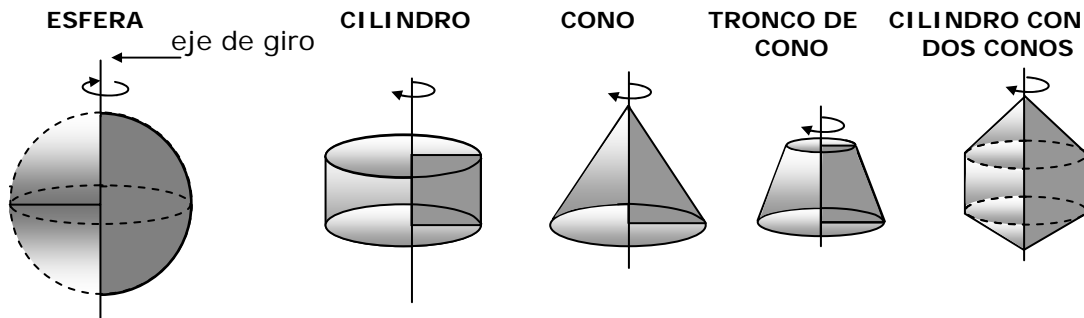


Fig. 2

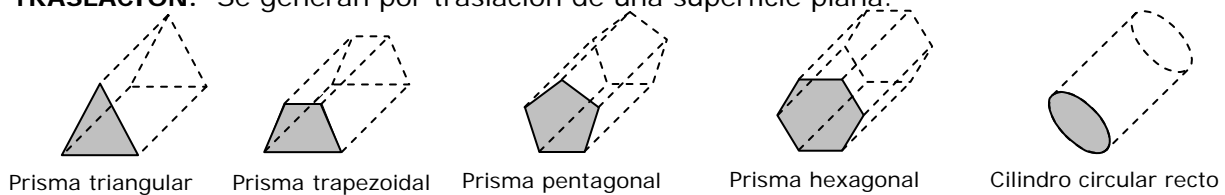
CUERPOS GENERADOS POR ROTACIÓN O TRASLACIÓN DE FIGURAS PLANAS

CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Los cuerpos de revolución se obtienen haciendo girar una superficie plana alrededor de un eje



TRASLACIÓN: Se generan por traslación de una superficie plana:



EJEMPLOS

- Dado un triángulo ABC, rectángulo en C (figura 1). ¿Cuál es el cuerpo generado por la rotación de dicho triángulo en torno a su hipotenusa?

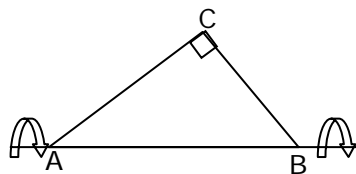
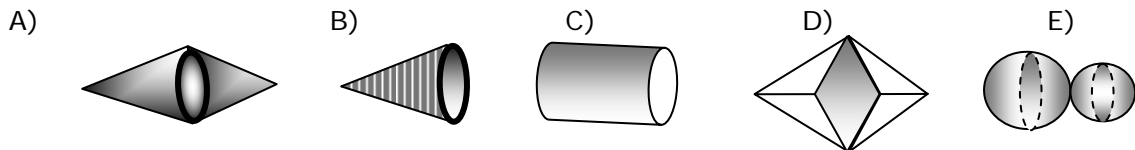


Fig. 1



- En la figura 2, se muestra un cuerpo de revolución. Este cuerpo puede ser generado por la rotación de la región

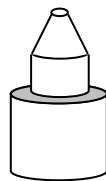
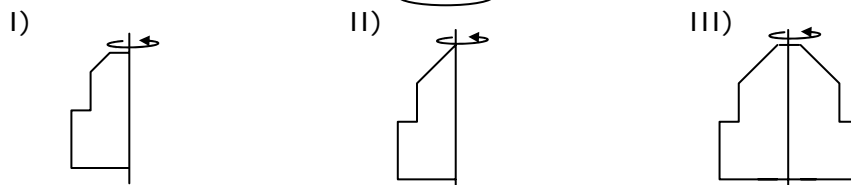
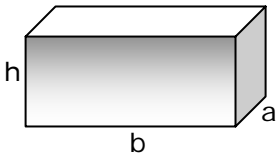
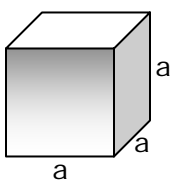
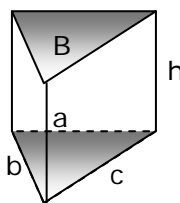
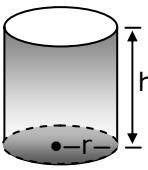
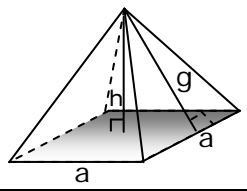
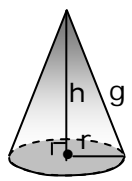
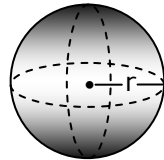


Fig. 2



- A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) Sólo I y II E) Sólo I y III

CUADRO RESUMEN DE ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

NOMBRE	FORMA	ÁREA	VOLUMEN
PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR		$2(ab + bh + ah)$	$a \cdot b \cdot h$
CUBO		$6a^2$	a^3
PRISMA RECTO RECTANGULAR		$h(a + b + c) + 2B$ B = área basal	Bh
CILINDRO RECTO BASE CIRCULAR		$2\pi rh + 2\pi r^2$	$\pi r^2 \cdot h$
PIRÁMIDE RECTA BASE CUADRADA		$2ag + a^2$ g = apotema lateral	$\frac{1}{3}a^2 \cdot h$
CONO RECTO BASE CIRCULAR		$\pi rg + \pi r^2$ g = generatriz	$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$
ESFERA		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

Volumen
Área de la base por la altura

Volumen
Área de la base por la altura dividido por tres

EJEMPLOS

1. ¿Cuál es el área y el volumen del prisma de base triangular de la figura 1 cuyas aristas miden 2 cm?

	Área	Volumen
A)	$6 + \sqrt{3} \text{ cm}^2$	$\sqrt{3} \text{ cm}^3$
B)	$12 + 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$	$\sqrt{3} \text{ cm}^3$
C)	$12 + \sqrt{3} \text{ cm}^2$	$\sqrt{3} \text{ cm}^3$
D)	$12 + 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$	$2\sqrt{3} \text{ cm}^3$
E)	$12 + 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$	$4\sqrt{3} \text{ cm}^3$

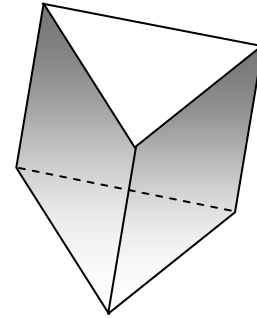


Fig. 1.

2. ¿Cuál es el volumen del cono generado por un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm cada uno?

- A) $3\pi \text{ cm}^3$
- B) $6\pi \text{ cm}^3$
- C) $9\pi \text{ cm}^3$
- D) $27\pi \text{ cm}^3$
- E) Se requiere información adicional

3. El área de la esfera cuyo radio mide 6 cm es

- A) $16 \pi \text{ cm}^2$
- B) $36 \pi \text{ cm}^2$
- C) $72 \pi \text{ cm}^2$
- D) $144 \pi \text{ cm}^2$
- E) $288 \pi \text{ cm}^2$

PUNTOS EN EL ESPACIO

En la figura 1 observamos tres ejes x , y , z mutuamente perpendiculares que generan también tres planos perpendiculares xy , xz , y el yz .

El paralelepípedo del dibujo, tiene tres de sus vértices en los ejes en tanto que el punto K está en el plano XZ , el punto L , en el plano YZ y el punto M en el plano XY , pero el punto A está "suspendido" en el espacio encerrado por los tres planos. Este punto A tiene coordenadas (a, b, c) .

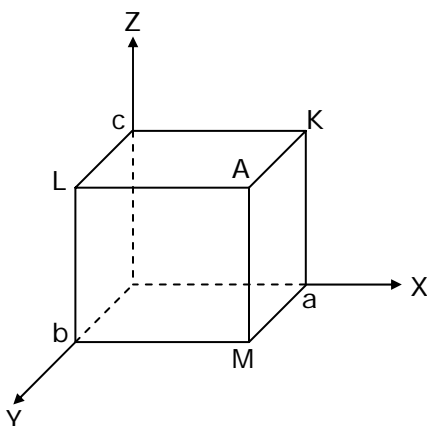


Fig. 1

EJEMPLOS

1. El cuadrado ABCD de lado 4 cm se ubica en el plano XY y el eje Z pasa por el punto de intersección de los diagonales del cuadrado como se ilustra en la figura 2. Si el lado \overline{DA} es paralelo al eje x, ¿cuáles son las coordenadas del vértice C?

- A) $(2, -2, 4)$
- B) $(-2, 2, 0)$
- C) $(0, -2, -2)$
- D) $(-2, -2, 0)$
- E) $(2, 2, 0)$

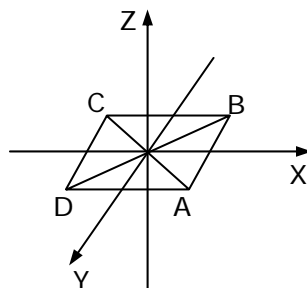


Fig. 2

2. ¿Cuál es la distancia entre el origen de coordenadas y el punto $(1, 1, 1)$?

- A) 1
- B) 3
- C) $\sqrt{2}$
- D) $\sqrt{3}$
- E) $\sqrt[3]{3}$

EJERCICIOS

1. El cuadrilátero ABCD es un rectángulo (figura 1). Si $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{DC} = 2x$, entonces el área del cilindro generado al rotar el rectángulo respecto del lado \overline{AD} es

- A) $4\pi x^2$
- B) $6\pi x^2$
- C) $8\pi x^2$
- D) $12\pi x^2$
- E) $16\pi x^2$

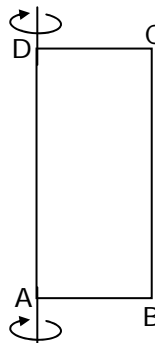


Fig. 1

2. La mitad de cada una de las caras de un cubo se ha achurado (figura 2). Si la superficie total achurada del cubo es de 48 cm^2 , ¿cuál es el volumen del cubo?

- A) 64 cm^3
- B) 96 cm^3
- C) $128\sqrt{2} \text{ cm}^3$
- D) 192 cm^3
- E) 256 cm^3

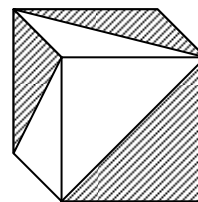


Fig. 2

3. Al desplazar 3 cm un triángulo equilátero de altura $\sqrt{3}$ cm, se obtiene un prisma recto. ¿Cuál es el área del cuerpo, en centímetros cuadrados?

- A) $3\sqrt{3}$
- B) $3 + \sqrt{3}$
- C) $6\sqrt{3}$
- D) $18 + \sqrt{6}$
- E) $18 + 2\sqrt{3}$

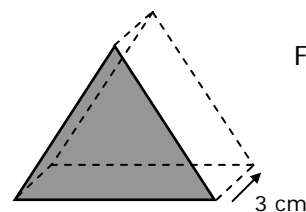


Fig. 3

4. ¿Cuánto mide el menor ángulo diedro formado por el plano ABCD y una de las caras del paralelepípedo rectangular de aristas $4, 4\sqrt{3}, 10$ de la figura 4?

- A) $\sqrt{3}^\circ$
- B) $2\sqrt{3}^\circ$
- C) 30°
- D) 60°
- E) 90°

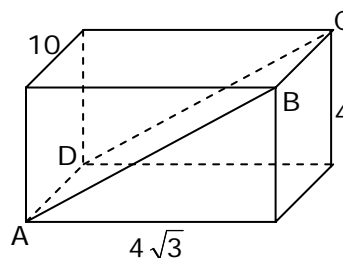


Fig. 4

5. Dentro de una caja cúbica cuyo volumen es 216 cm^3 , es colocada una pelota que es tangente a las caras del cubo (figura 5). ¿Cuál es el volumen de la pelota?

- A) $108\pi \text{ cm}^3$
- B) $36\pi \text{ cm}^3$
- C) $27\pi \text{ cm}^3$
- D) $18\pi \text{ cm}^3$
- E) $6\pi \text{ cm}^3$

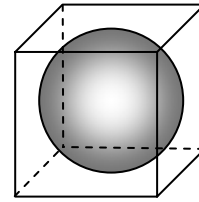


Fig. 5

6. En la figura 6, la pirámide ABCOE está inscrita en el cubo. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- I) La diferencia entre el volumen del cubo y la pirámide es el doble del volumen de la pirámide.
- II) El volumen del cubo es 3 veces el volumen de la pirámide.
- III) El área del cubo es 3 veces el área de la pirámide.

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo I y II
- D) Sólo I y III
- E) Sólo II y III

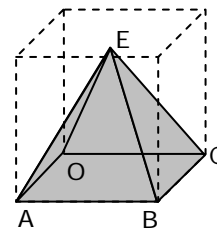


Fig. 6

7. La figura 7 representa una piscina generada al trasladar n metros el trapecio achurado. El largo de la piscina es 8 m y tiene 1,5 m de profundidad mínima y 2,5 m de profundidad máxima. Para que el volumen de la piscina sea 56 m^3 el valor de n debe ser

- A) 1,5 m
- B) 2,5 m
- C) 3,5 m
- D) 4,0 m
- E) 4,5 m

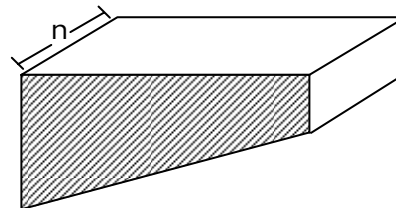


Fig. 7

8. Al sumergir completamente una piedra dentro de un tubo cilíndrico de 5 cm de radio (figura 8), el nivel del agua que contiene sube 4 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra? (considere $\pi = 3,14$)

- A) $314,0 \text{ cm}^3$
 B) $251,2 \text{ cm}^3$
 C) $125,6 \text{ cm}^3$
 D) $31,4 \text{ cm}^3$
 E) Falta información para determinarlo

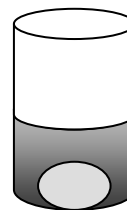


Fig. 8

9. ¿Cuál es el volumen de un cuerpo generado por la traslación perpendicular de 2 cm, de un cuadrado de lado 5 cm?

- A) 10 cm^3
 B) 20 cm^3
 C) 25 cm^3
 D) 50 cm^3
 E) 125 cm^3

10. Las pelotas de tenis vienen envasadas en tarros cilíndricos con tres de ellas en cada uno (figura 9). ¿Cuál es el volumen del tarro si el radio de cada pelota es 4 cm? (considere $\pi = 3$)

- A) 1.152 cm^3
 B) 952 cm^3
 C) 576 cm^3
 D) 288 cm^3
 E) 192 cm^3

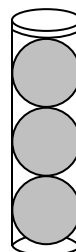


Fig. 9

11. Los puntos A, B, C y D de la figura 10, son los vértices de la base de un cubo. ¿Cuál de los puntos de las alternativas **NO** es uno de los 4 vértices que faltan del cubo?

- A) (1, 2, 4)
 B) (2, 5, 4)
 C) (6, 1, 4)
 D) (6, 5, 4)
 E) (2, 1, 4)

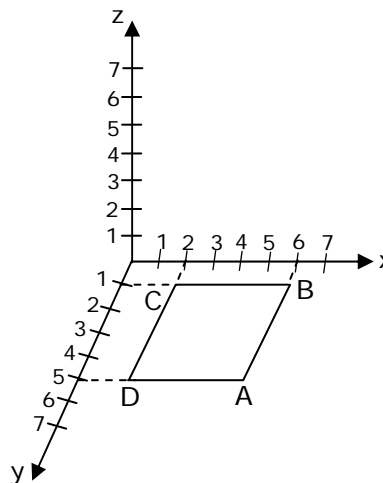


Fig. 10

12. En la figura 11, se muestra un cuerpo de revolución. ¿En cuál(es) de las opciones siguientes se puede generar el cuerpo al rotar la figura plana en torno al eje AB?

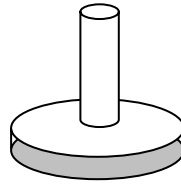
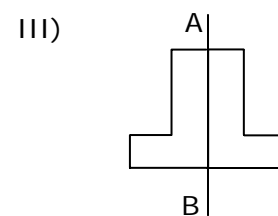
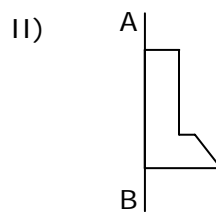
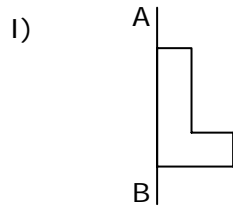


Fig. 11



- A) Sólo en I
 B) Sólo en I y en II
 C) Sólo en I y en III
 D) Sólo en II y en III
 E) En I, en II y en III

13. Las caras A y B de la caja (fig. 12) son cuadradas y el resto son rectangulares. El volumen de la caja se puede determinar si:

- (1) El área de una de las caras cuadradas es de 36 cm^2 .
 (2) El perímetro de una de las caras rectangulares es de 32 cm.

- A) (1) por sí sola
 B) (2) por sí sola
 C) Ambas juntas, (1) y (2)
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 E) Se requiere información adicional

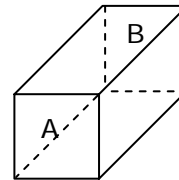


Fig. 12

14. El peso del ladrillo de la figura 13, se puede determinar si:

- (1) 1 cm^3 del material con que ha sido fabricado pesa 2 gramos.
 (2) Medio kilo equivale a 250 cm^3 del material ocupado.

- A) (1) por sí sola
 B) (2) por sí sola
 C) Ambas juntas, (1) y (2)
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 E) Se requiere información adicional

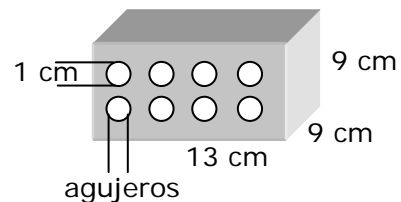


Fig. 13

15. Se puede determinar la razón entre los volúmenes de los cuerpos generados por los triángulos ABC y DEF de la figura 14, al hacerlos girar en torno al eje indicado si:

(1) $\triangle ABC \cong \triangle DFE$

(2) $\overline{BC} = \overline{EF} = 2 \text{ cm}$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

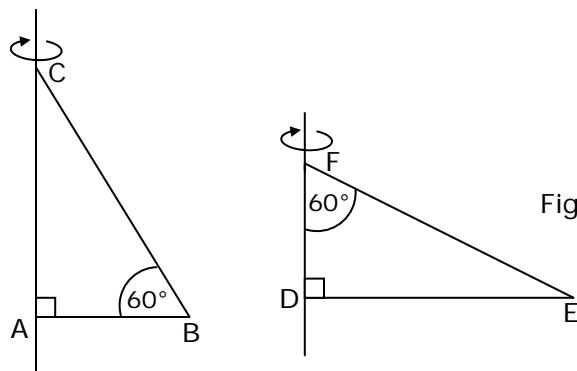


Fig. 14

RESPUESTAS

Ejemplos Págs.	1	2	3
1	A		
2	D	E	
3	A	E	
5	D	C	D
6	D	D	

CLAVES PÁG. 7

- 1. B 6. C 11. A
- 2. A 7. C 12. C
- 3. E 8. A 13. C
- 4. C 9. D 14. D
- 5. B 10. A 15. D

DSEMA38

Puedes complementar los contenidos de esta guía visitando nuestra web
<http://clases.e-pedrovaldivia.cl/>