Material N° 31

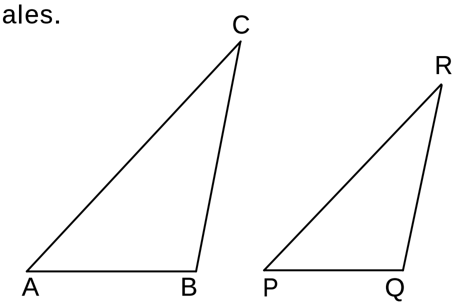
GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 23

UNIDAD: GEOMETRÍA

GEOMETRÍA PROPORCIONAL

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos, se dirán semejantes, cuando los ángulos de uno de ellos sean respectivamente congruentes con los ángulos del otro y cuando además, tengan sus lados homólogos proporcionales.



ΔABC ~ ΔPQR si y solamente si

$\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$

y

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{RP}}$$

OBSERVACIONES

- Esta definición encierra la idea de similitud de forma: es decir, dos triángulos son semejantes, si y sólo si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.
- Dos polígonos de un mismo número de lados, se dirán **semejantes**, cuando los ángulos de uno de ellos sean respectivamente congruentes con los ángulos del otro y cuando además, tengan sus lados homólogos proporcionales.
- La congruencia es un caso particular de semejanza.

EJEMPLOS

1. Si en la figura 1, ΔABC ~ ΔA'B'C' , entonces α es

   A) igual a α'
   B) un cuarto de α'
   C) un tercio de α'
   D) el doble de α'
   E) el triple α'

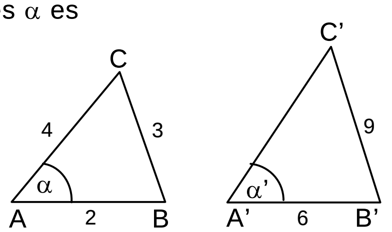


Fig. 1

2. Los lados de un triángulo miden 30 cm, 50 cm y 60 cm. ¿Cuánto mide el lado más largo de un triángulo semejante con él y cuyo lado menor mide 20 cm?

   A) 30 cm
   B) 40 cm
   C) 50 cm
   D) 60 cm
   E) 70 cm

TEOREMAS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Para establecer la semejanza entre dos triángulos no es necesario verificar cada una de las seis condiciones expuestas anteriormente, sino que la ocurrencia de algunas de ellas provocan necesariamente la ocurrencia de las otras restantes.

TEOREMA 1 (TEOREMA FUNDAMENTAL)

Para que dos triángulos sean semejantes, los ángulos de uno de ellos deben ser congruentes a los ángulos del otro.

O sea, en la figura 1

Si $\angle A \cong \angle P$ y $\angle B \cong \angle Q$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

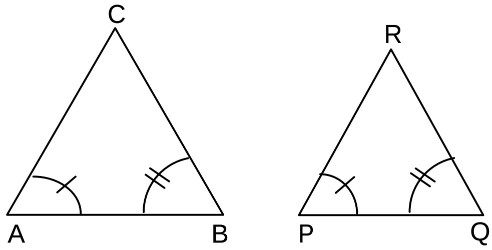


Fig. 1

COROLARIO

Toda paralela a un lado de un triángulo, determina un triángulo semejante al primero (figura 2).

O sea: **Si $\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$, entonces $\triangle CDE \sim \triangle CAB$**

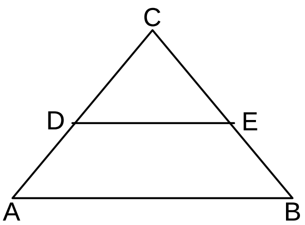


Fig. 2

EJEMPLOS

1. En la figura 3, el trazo DE es paralelo al lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC. Entonces, el triángulo CDE es semejante al triángulo ABC en su orden

   A) BAC
   B) CBA
   C) CAB
   D) BCA
   E) ABC

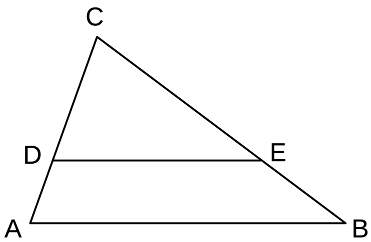


Fig. 3

3. Las rectas L_1 y L_2 de la figura 4, son paralelas y los trazos DB y AE se cortan en C. Entonces, el triángulo ABC es semejante al triángulo DEC en su orden

   A) DCE
   B) EDC
   C) DEC
   D) ECD
   E) CED

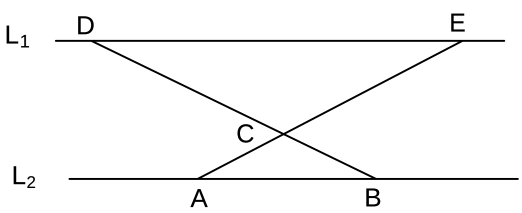


Fig. 4

TEOREMA 2

Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan **un ángulo congruente comprendido entre lados proporcionales**.

O sea, en la figura 1:

Si $\angle A \cong \angle P$ y $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

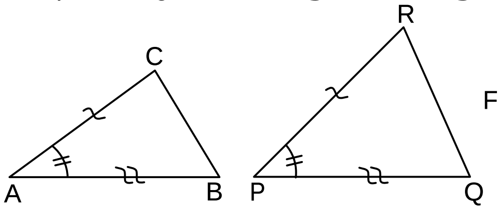


Fig. 1

TEOREMA 3

Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan sus **lados proporcionales**.

O sea, en la figura 2:

Si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{RP}}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

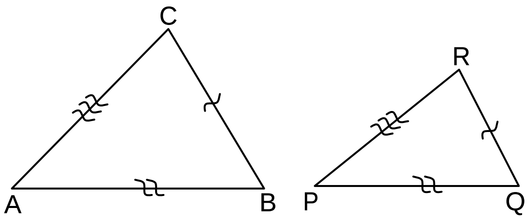


Fig. 2

TEOREMA 4

Para que dos triángulos sean semejantes, basta que **tengan dos de sus lados respectivamente proporcionales, y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados, congruentes**.

O sea, en la figura 3:

Si $\angle C \cong \angle R$ y $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

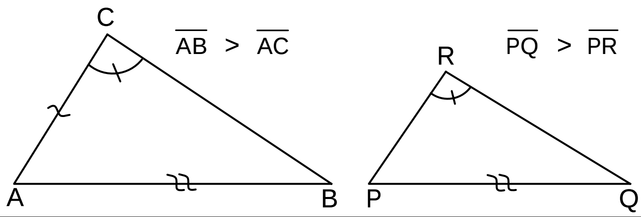


Fig. 3

EJEMPLOS

1. Sea $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ y las longitudes de los lados sean las indicadas en la figura 4. ¿Cuál es la longitud de (x + y)?

   A) $\dfrac{21}{4}$

   B) $\dfrac{27}{4}$

   C) $\dfrac{30}{4}$

   D) $\dfrac{51}{4}$

   E) $\dfrac{61}{4}$

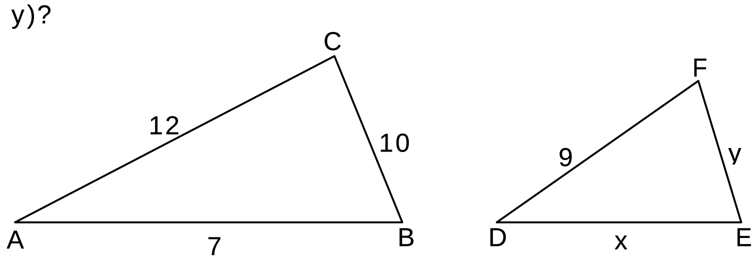


Fig. 4

2. Según los datos dados en la figura 5, ¿cuál es la longitud de $\overline{AC}$ si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PR}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{PQ}}$?

   A) 10
   B) 8
   C) 6
   D) 3,9
   E) 1,3

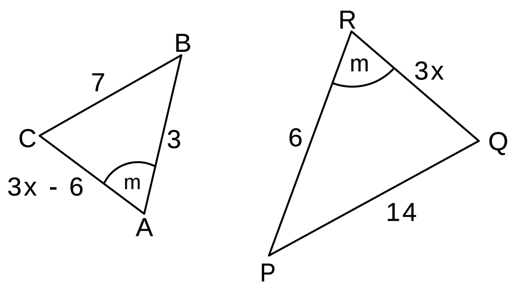


Fig. 5

De acuerdo a los elementos de la figura 1, se cumplen los siguientes teoremas:

TEOREMA 5

En triángulos semejantes, dos lados homólogos están en la misma razón que dos trazos homólogos cualesquiera y también están en la misma razón que sus perímetros.

$$\boxed{\frac{b}{b'} = \frac{t_c}{t_{c'}} = \frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{\text{Perímetro } \Delta ABC}{\text{Perímetro } \Delta A'B'C'} = ...}$$

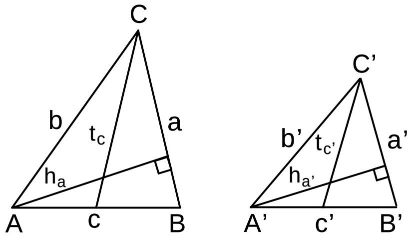


Fig. 1

TEOREMA 6

Las áreas de triángulos semejantes están en una razón equivalente al cuadrado de la razón en que se encuentran dos trazos homólogos cualesquiera.

$$\boxed{\frac{\text{Área } \Delta ABC}{\text{Área } \Delta A'B'C'} = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{t_c}{t_{c'}}\right)^2 = \left(\frac{h_a}{h_{a'}}\right)^2 = ...}$$

TEOREMA 7

En el triángulo ABC, de la figura 2, $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ son transversales de gravedad. Como el $\Delta ABG \sim \Delta MNG$ entonces se cumple que:

$$\boxed{\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GN}} = \frac{2}{1}}$$

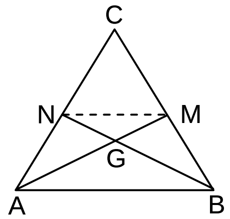


Fig. 2

EJEMPLOS

1. En la figura 3, el trazo DE es paralelo al lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC. ¿Cuál es el perímetro del ΔCDE?

   A) 36
   B) 32
   C) 27
   D) 21
   E) 18

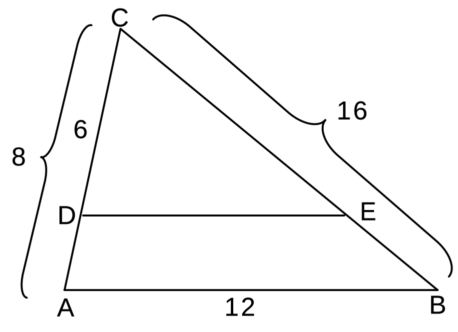


Fig. 3

2. Los triángulos ABC y A´B´C´ de la figura 4, son **semejantes**. S y S´ representan las áreas del primer y segundo triángulo respectivamente. Si S : S´ = 1 : 4 , ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) **falsa(s)**?

I) $a : a' = 1 : 2$
II) $h_c : h_{c'} = 1 : 4$
III) $h_c : h_{c'} = t_c : t_{c'}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

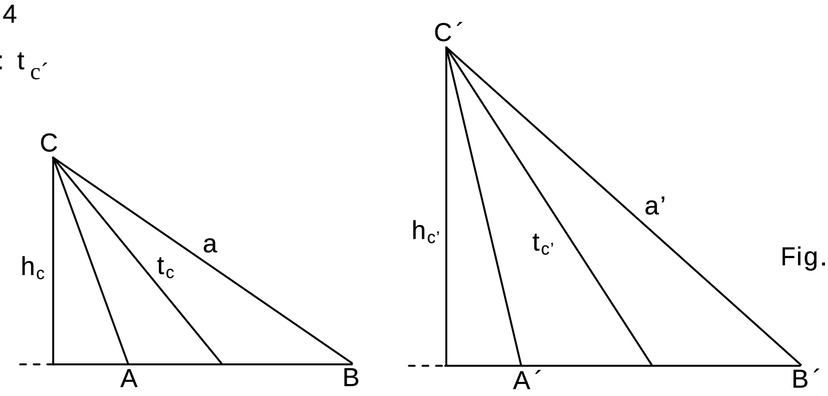


Fig. 4

3. El triángulo de la figura 5, es equilátero de lado $10\sqrt{3}$ cm. Si $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$ son transversales de gravedad, entonces $\overline{CF} + \overline{BE}$ mide

A) $15\sqrt{3}$ cm
B) $(5 + 5\sqrt{3})$ cm
C) $(10 + 5\sqrt{3})$ cm
D) $(10 + 2\sqrt{3})$ cm
E) $(5 + 10\sqrt{3})$ cm

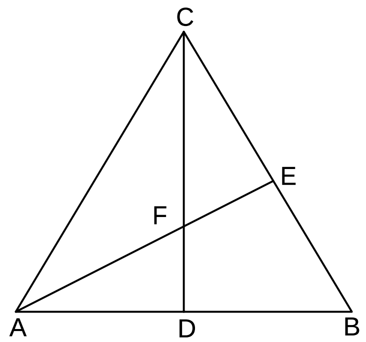


Fig. 5

4. Las rectas L_1 y L_2 de la figura 6, son paralelas y los trazos DB y AE se cortan en C. ¿Cuál es la razón entre el área del ΔABC y el área del ΔEDC?

A) 1 : 3
B) 6 : 18
C) 3 : 6
D) 3 : 9
E) 1 : 9

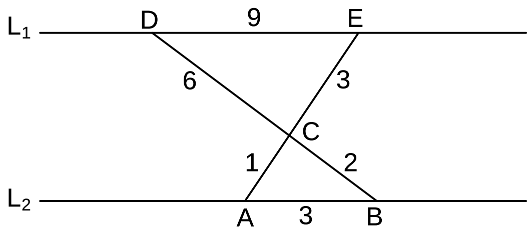
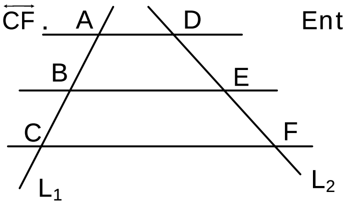


Fig. 6

TEOREMA DE THALES

Si dos rectas se cortan por tres o más paralelas, los segmentos determinados en una de ellas son respectivamente proporcionales a los segmentos determinados en la otra.

En la figura 1, L_1 y L_2 son rectas y $\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BE} \,//\, \overleftrightarrow{CF}$.



Entonces: $\boxed{\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}}$

Fig. 1

EJEMPLOS

1. En la figura 2, $L_1 \,//\, L_2 \,//\, L_3$, entonces x =

   A) 0
   B) 2
   C) 3
   D) 4
   E) 6

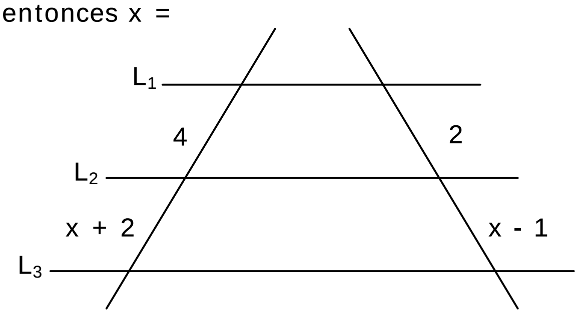


Fig. 2

2. Si en la figura 3, $L_1 \,//\, L_2 \,//\, L_3$, entonces x + y =

   A) 24
   B) 11
   C) 8
   D) 5
   E) 3

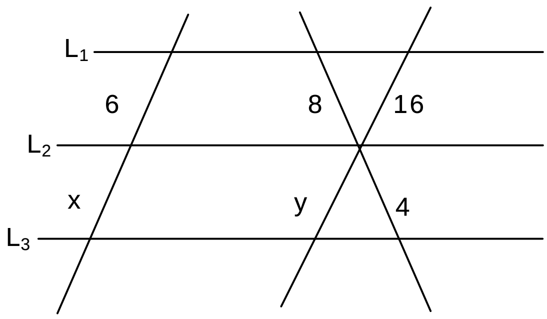


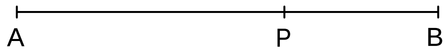
Fig. 3

DIVISIÓN DE TRAZOS

a) **DIVISIÓN INTERNA**

Un punto P perteneciente a un trazo AB lo divide en la razón m : n, si $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$

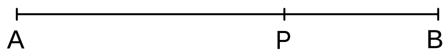
$$\boxed{\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n}}$$



b) **DIVISIÓN ÁUREA O DIVINA**

Dividir un trazo en sección áurea o divina, consiste en dividirlo en dos segmentos, de modo que la razón entre el trazo entero y el segmento mayor sea igual a la razón entre el segmento mayor y el menor.

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}}$$



OBSERVACIÓN: La razón $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$ se denomina RAZÓN ÁUREA, y su valor es el NÚMERO ÁUREO:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1{,}618034$$

EJEMPLOS

1. Un punto P divide interiormente a un segmento AB en la razón 5 : 3. Si $\overline{PB}$ = 36 cm, ¿cuánto mide $\overline{AB}$?

   A) 12 cm
   B) 48 cm
   C) 60 cm
   D) 72 cm
   E) 96 cm

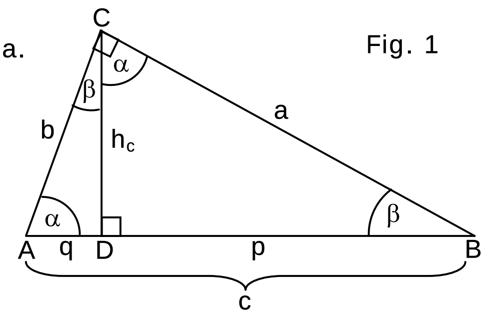
2. Un punto Q divide en sección áurea a un trazo CD, con $\overline{CQ} > \overline{QD}$. Si $\overline{CD}$ = 10 cm y $\overline{CQ}$ = x, entonces la ecuación para determinar x es

   A) $x^2 + 10x - 100 = 0$
   B) $x^2 - 10x + 100 = 0$
   C) $x^2 - 10x - 100 = 0$
   D) $x^2 + 10x + 100 = 0$
   E) $x^2 + x - 100 = 0$

TEOREMAS DE EUCLIDES

El triángulo de la figura 1 es rectángulo en C y $\overline{CD}$ es altura.

Fig. 1



a y b: catetos

c: hipotenusa

p y q: proyecciones de los catetos a y b respectivamente.

Los triángulos ACB, ADC y CDB son semejantes.

- **Referente a la altura:** En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional geométrica entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

$$\boxed{h_c^2 = p \cdot q}$$

- **Referente a los catetos:** En todo triángulo rectángulo cada cateto es media proporcional geométrica entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

$$\boxed{a^2 = p \cdot c} \qquad \boxed{b^2 = q \cdot c}$$

EJEMPLOS

1. Según los datos proporcionados por la figura 2, el valor de x es

   A) 36
   B) 28
   C) 13
   D) 5
   E) 2,25

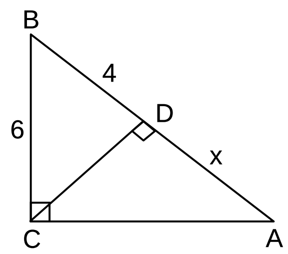


Fig. 2

2. En el $\triangle$ABC de la figura 3, $\overline{CD}$ es altura. ¿Cuál es la medida del cateto $\overline{BC}$?

   A) 48
   B) 16
   C) $4\sqrt{3}$
   D) 6
   E) 4

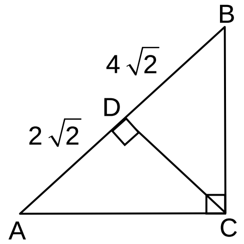
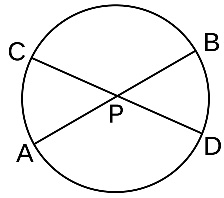


Fig. 3

PROPORCIONALIDAD EN LA CIRCUNFERENCIA

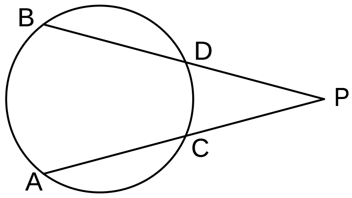
Teorema de las cuerdas:



Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan en el interior de ella, el producto de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de segmentos determinados en la otra.

$$\boxed{\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}}$$

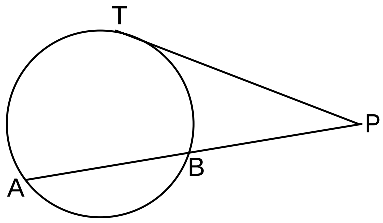
Teorema de las secantes:



Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una de ellas por su segmento exterior es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior.

$$\boxed{\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}}$$

Teorema de la tangente y la secante



Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional geométrica entre la secante y su segmento exterior.

$$\boxed{\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}}$$

EJEMPLOS

1. En la circunferencia de centro O (fig. 1), $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas que se intersectan en P. Si $\overline{AP}$ = 9 cm, $\overline{PB}$ = 12 cm y $\overline{CP}$ = 18 cm, entonces $\overline{PD}$ mide

   A) 24 cm
   B) 21 cm
   C) 13,5 cm
   D) 6 cm
   E) 3 cm

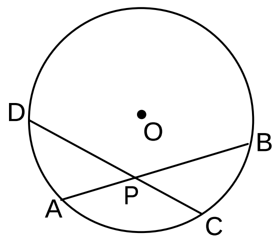


Fig. 1

2. En la figura 2, $\overline{PS}$ y $\overline{PU}$ son secantes a la circunferencia de centro O. Si $\overline{PR} = \overline{RS} = 14$ y $\overline{PT} = 8$, entonces $\overline{TU}$ es igual a

A) 8
B) 14
C) 20
D) 33
E) 41

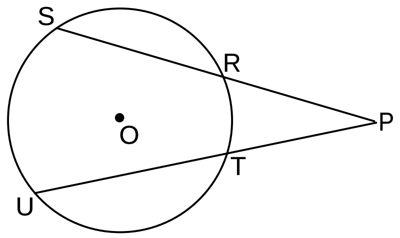


Fig. 2

3. En la circunferencia de centro O (figura 3), $\overline{MN}$ es tangente en N y $\overline{MS}$ es secante. Si $\overline{MR}$ = 3 cm y $\overline{RS}$ = 45 cm, entonces la tangente $\overline{MN}$ mide

A) 12 cm
B) 21 cm
C) 36 cm
D) 45 cm
E) 144 cm

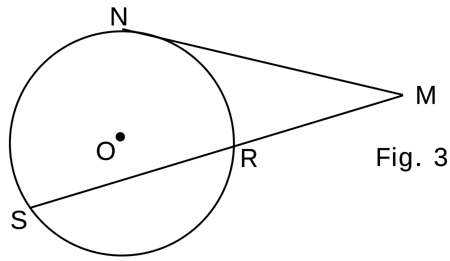


Fig. 3

4. En la figura 4, $\overline{AD}$ = 16 cm y $\overline{DC}$ = 9 cm. Si el segmento DE es paralelo a la tangente $\overline{BC}$, ¿cuál es la medida del segmento DE?

A) 20 cm
B) 12 cm
C) 9,6 cm
D) $8\sqrt{2}$ cm
E) 3,2 cm

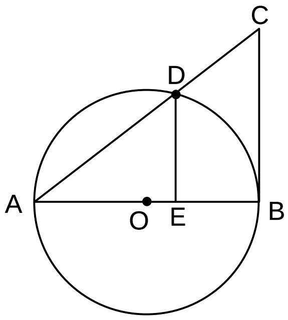


Fig. 4

EJERCICIOS

1. Los rectángulos de la figura 1, son semejantes. Si $\overline{FG}$ = 20 cm , $\overline{GH}$ = 30 cm y el perímetro del rectángulo ABCD es de 360 cm, entonces su lado menor mide

   A) 72 cm
   B) 108 cm
   C) 144 cm
   D) 216 cm
   E) Ninguna de las anteriores

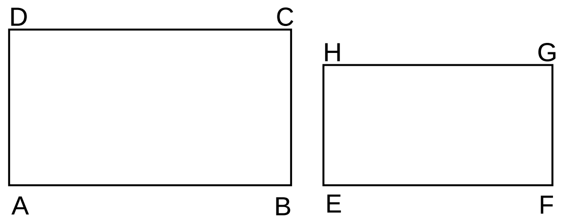


Fig. 1

2. Las rectas L_1 y L_2 de la figura 2, son paralelas y los trazos DB y AE se cortan en C. Si $\overline{AC}$ = 6 cm , $\overline{AB}$ = 10 cm y $\overline{CE}$ = 9 cm, entonces $\overline{ED}$ =

   A) 12 cm
   B) 13 cm
   C) 14 cm
   D) 15 cm
   E) 18 cm

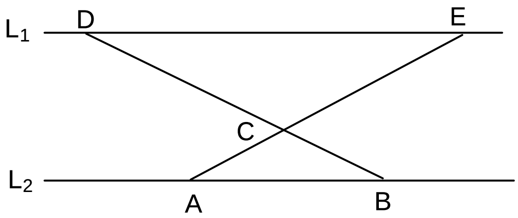


Fig. 2

3. En la figura 3, el trazo DE es paralelo al lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC. Si $\overline{AB}$ = 14 cm, $\overline{AC}$ = 21 cm y $\overline{AE}$ = 8 cm, entonces $\overline{DE}$ =

   A) 6 cm
   B) 7 cm
   C) 8 cm
   D) 9 cm
   E) 12 cm

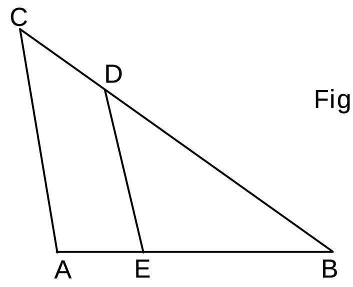


Fig. 3

4. En la figura 4, las rectas L_4 y L_5 intersectan las rectas paralelas L_1, L_2 y L_3. ¿Cuál es el valor de x?

   A) 0,4
   B) 1
   C) 3,5
   D) 5
   E) 8

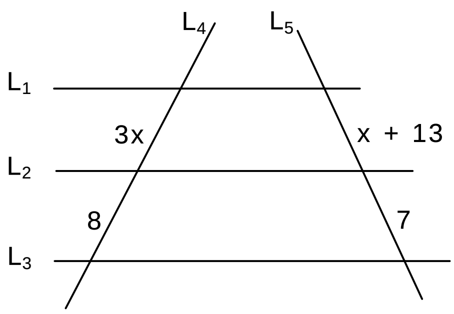


Fig. 4

5. El trazo AB (fig. 5) se divide interiormente en la razón 2 : 3, siendo P el punto de división del trazo. A continuación el trazo PB se divide interiormente en la razón 1 : 2, siendo Q el punto de división $\overline{PB}$. Con esta información se puede determinar ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones que es(son) verdadera(s)?

I) $\overline{AP} = \overline{QB}$
II) $\overline{AQ} = \overline{PB}$
III) $\overline{AQ} > \overline{QB}$

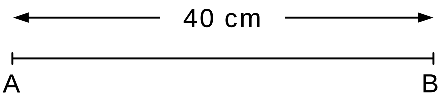


Fig. 5

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

6. En la figura 6, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Si $\overline{AB}$ = 2 cm y $\overline{A'B'}$ = 6 cm, ¿cuál(es) de las afirmaciones es(son) **falsa(s)**?

I) Si $\overline{CD}$ = 4 cm, entonces $\overline{C'D'}$ = 12 cm.
II) Si Per (ΔABC) = 7 cm, entonces Per ($\Delta A'B'C'$) = 21 cm.
III) Si Ár (ΔABC) = 6 cm^2, entonces Ár ($\Delta A'B'C$) = 36 cm^2.

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas

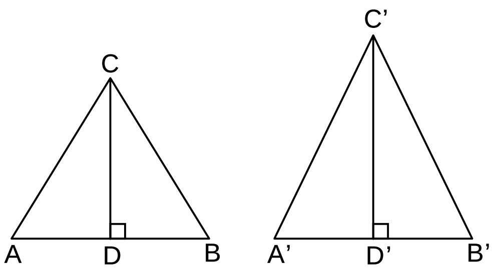


Fig. 6

7. En la figura 7, $\overline{PQ}$ y $\overline{ST}$ representan a 2 pinos. Una lechuza que estaba posada en P, voló 40 metros en forma rectilínea hasta el punto R donde atrapó un ratón, y luego alzó vuelo, también en forma rectilínea y recorriendo 30 metros, se posó con su presa en S. Si el pino $\overline{PQ}$ mide 28 metros, ¿cuánto mide el pino $\overline{ST}$?

A) 10,5 metros
B) 14 metros
C) 21 metros
D) 22,5 metros
E) $\frac{28}{3}$ metros

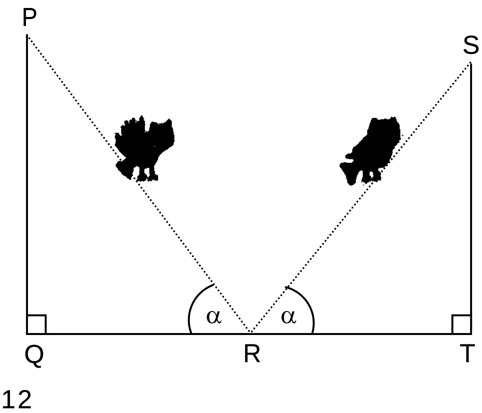


Fig. 7

8. En el triángulo ABC de la figura 8, $\overline{PQ}$ es tal que el $\angle$ CPQ es congruente con el $\angle$ CBA. Si $\overline{AB}$ = 15 cm, $\overline{AC}$ = 18 cm y $\overline{PQ}$ = 5 cm, entonces $\overline{CQ}$ =

A) 6 cm
B) 5 cm
C) 4 cm
D) 3 cm
E) 2 cm

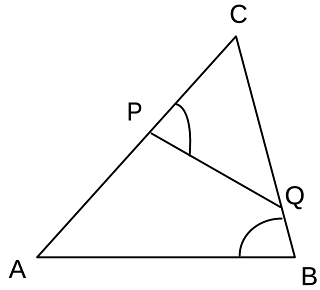


Fig. 8

9. En el triángulo ABC de la figura 9, se ha trazado $\overline{CE}$ tal que $\angle$ ECB = $\angle$ BAC. Si $\overline{AB}$ = 5 cm y $\overline{BC}$ = 4 cm, entonces $\overline{AE}$ =

A) 1,25 cm
B) 1,8 cm
C) 2,5 cm
D) 3,2 cm
E) Ninguna de las anteriores

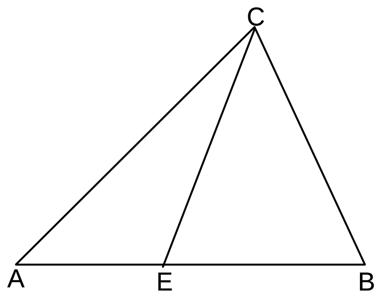


Fig. 9

10. Un avión de combate vuela a 3.000 m de altura (figura 10). En el momento preciso en que vuela sobre el punto P ubicado en tierra, se le lanza un cohete desde este punto, impactando al avión en el punto Q. Si $\overline{BC}$ = 1.500 m, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) El avión recorrió de A a B, lo mismo que de B a Q.
II) El cohete viajó de P a Q el doble de lo que viajó el avión de A a Q.
III) El impacto se produjo porque el cohete viajó con la misma rapidez que el avión.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) Ninguna es verdadera

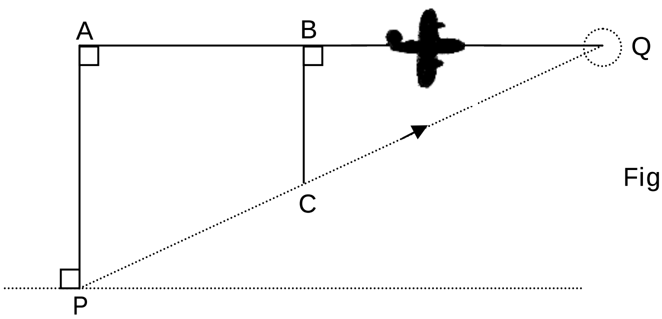


Fig. 10

11. En el ΔPQR (fig. 11), $\overline{ST} \perp \overline{PQ}$, $\overline{QS} \perp \overline{PR}$ y $\overline{RQ} \perp \overline{PQ}$, entonces cuál(es) de las siguientes relaciones es(son) verdadera(s)?

I) $\Delta PQR \sim \Delta QSR$
II) $\Delta PTS \sim \Delta STQ$
III) $\Delta QRS \sim \Delta PST$

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

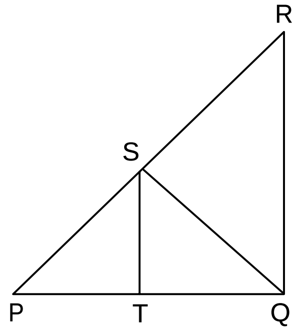


Fig. 11

12. El triángulo ABC de la figura 12, es rectángulo en C, y $\overline{CD}$ es altura. Si $\overline{BD} = 1$ y $\overline{AB} = 9$, entonces $\overline{AC}$ =

A) $\sqrt{3}$
B) 2
C) 3
D) $2\sqrt{2}$
E) $6\sqrt{2}$

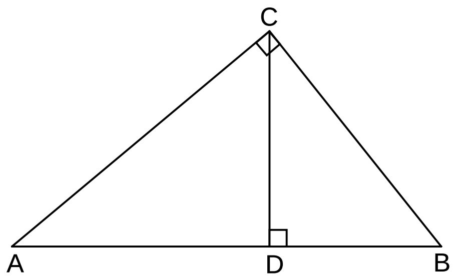


Fig. 12

13. En el ΔABC de la figura 13, la altura h_c mide 8 cm y los segmentos que ella determina sobre la hipotenusa están en la razón 4 : 1. ¿Cuánto suman estos dos segmentos?

A) 64 cm
B) 20 cm
C) 16 cm
D) 12 cm
E) 40 cm

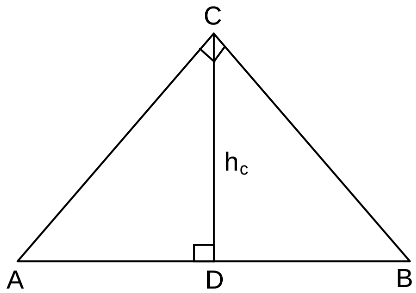


Fig. 13

14. En la circunferencia de centro O de la figura 14, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas que se intersectan en E. Si $\overline{AE} = \overline{EB}$, $\overline{CE} = 4$ cm y $\overline{ED} = 9$ cm, entonces la medida de $\overline{AB}$ es

A) 6 cm
B) 9 cm
C) 12 cm
D) 24 cm
E) 36 cm

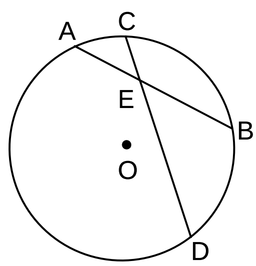


Fig. 14

15. Si P divide en sección áurea al trazo AB de la figura 15, siendo $\overline{AP} > \overline{PB}$, entonces se cumple que

A) $x^2 - ax + a^2 = 0$
B) $x^2 + ax - a^2 = 0$
C) $x^2 + ax + a^2 = 0$
D) $x^2 - ax - a^2 = 0$
E) $x^2 - ax - 2a = 0$

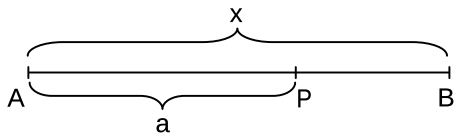


Fig. 15

16. En la circunferencia de la figura 16, $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son secantes. Si $\overline{PC} = 4$, $\overline{CA} = 3$ y $\overline{DB} = 2$, entonces $\overline{PD}$ =

A) $-1 - \sqrt{29}$
B) $-1 + \sqrt{29}$
C) $2(\sqrt{29} - 1)$
D) 6
E) 4

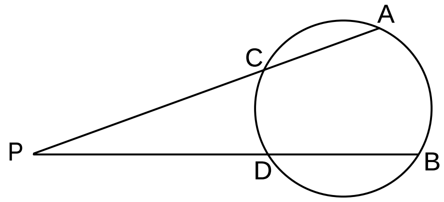


Fig. 16

17. Las circunferencias de centros O y P son tangentes exteriormente en T (figura 17); $\overline{RT}$ es tangente, $\overline{RW}$ y $\overline{RX}$ son secantes. Si $\overline{RX}$ = 16 cm, $\overline{RS}$ = 5 cm, $\overline{RN}$ = 8 cm, entonces $\overline{RW}$ mide

A) Faltan datos para determinarlo
B) 26 cm
C) 18 cm
D) 16 cm
E) 10 cm

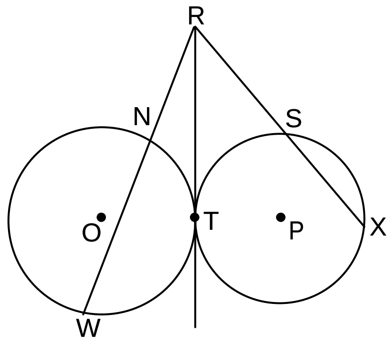


Fig. 17

18. En la figura 18, se tiene un rectángulo MNPQ inscrito en un triángulo rectángulo ABC. Si $\overline{AB}$ = 20, $\overline{AM}$ = 4 y $\overline{NB}$ = 9, entonces el perímetro del rectángulo MNPQ es

A) 18
B) 20
C) 24
D) 26
E) 30

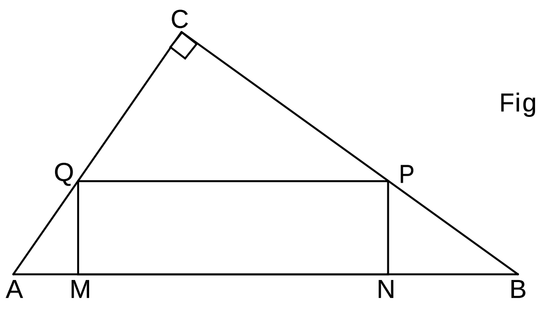


Fig. 18

19. ABCD es un cuadrado (fig. 19). $\triangle$AFE es semejante con $\triangle$FCG si:

(1) $\overline{EF} \perp \overline{FG}$

(2) EFGD es un rectángulo.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

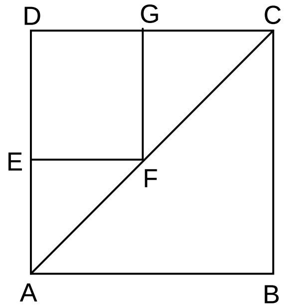


Fig. 19

20. En el $\triangle$ABC (fig. 20), el $\triangle$ADC es semejante al $\triangle$DBC si:

(1) $\angle$ ACB es recto.

(2) $\overline{CD}$ es altura.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

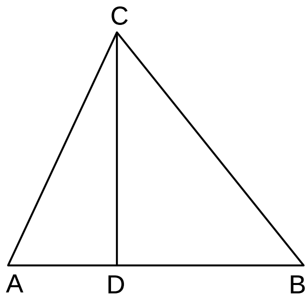


Fig. 20

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3	4
1	A	B		
2	C	B		
3	D	C		
4 y 5	C	B	C	E
6	D	B		
7	E	A		
8	D	C		
9 y 10	D	E	A	C

CLAVES PÁG. 11

1. A	6. B	11. E	16. B
2. D	7. C	12. E	17. E
3. D	8. A	13. B	18. D
4. E	9. B	14. C	19. B
5. E	10. A	15. D	20. C

DSEMA31