Material N° 19

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 15

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

SISTEMAS DE ECUACIONES

Dos ecuaciones de primer grado, que tienen ambas las mismas dos incógnitas, constituyen un **sistema de ecuaciones lineales**.

La forma general de un sistema de ecuaciones de primer grado es:

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{array}\right|$$ donde A, B, C, D, E y F son números reales.

Se denomina **solución del sistema** a todo par (x, y) que **satisfaga simultáneamente** ambas ecuaciones.

OBSERVACIÓN: Cada ecuación de un sistema de ecuaciones, representa una línea recta en un sistema de ejes coordenados.

EJEMPLOS

1. El par ordenado (5, 4) es solución del (los) sistema(s):

I) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 31 \\ 2x + 3y = 22 \end{array}\right|$ II) $\left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ -3x + 2y = -7 \end{array}\right|$ III) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 6 \\ x - y = 1 \end{array}\right|$

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I , II y III

2. Para que el par ordenado (2, 3) sea solución del sistema $\left.\begin{array}{r} mx - y = 7 \\ x + ny = 8 \end{array}\right|$ los valores de **m** y **n** deben ser, respectivamente

A) 2 y 5
B) 2 y 6
C) 5 y 2
D) 3 y 5
E) 10 y 3

MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

RESOLUCIÓN GRÁFICA: Para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se representan ambas rectas en un sistema de ejes coordenados, con lo cual surge una de las siguientes posibilidades.

i) Las rectas se intersectan en un punto, cuyas coordenadas (a, b) es la solución del sistema (fig. 1).

ii) Las dos rectas coinciden, dando origen a infinitas soluciones (fig. 2).

iii) Las dos rectas son paralelas (no se intersectan), por lo tanto no hay solución (fig. 3).

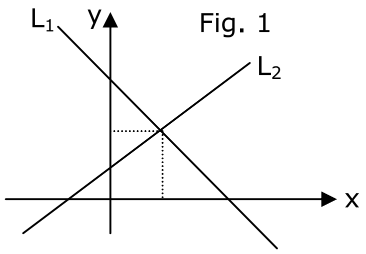


Fig. 1

$L_1 \cap L_2 = (a, b)$

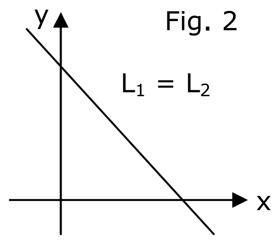


Fig. 2

$L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$

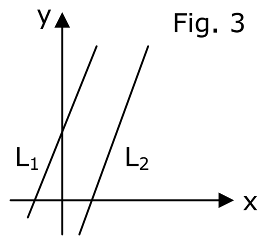


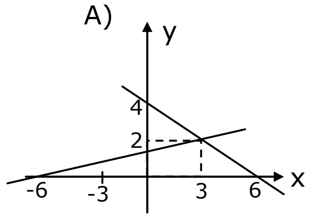
Fig. 3

$L_1 \cap L_2 = \varnothing$ (vacío)

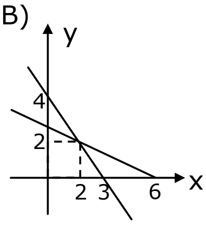
EJEMPLOS

1. La solución gráfica del sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 12 \\ -x + 3y = 3 \end{array}\right|$

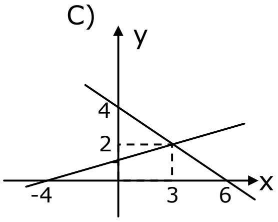
A)



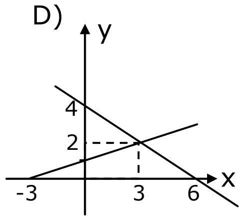
B)



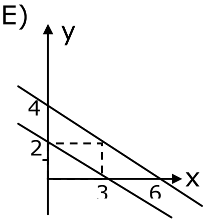
C)



D)



E)



2. La figura 4 es la solución gráfica del sistema

A) $\left.\begin{array}{r} -x + y = -2 \\ -x + y = 3 \end{array}\right|$

B) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{array}\right|$

C) $\left.\begin{array}{r} 2x - 2y = 4 \\ 3x - 3y = 3 \end{array}\right|$

D) $\left.\begin{array}{r} -3x + 3y = 2 \\ x - y = 3 \end{array}\right|$

E) $\left.\begin{array}{r} -x - y = -2 \\ -x - y = 3 \end{array}\right|$

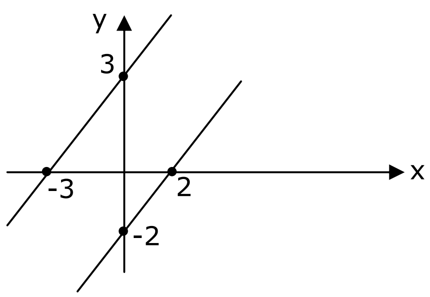


Fig. 4

RESOLUCIÓN ALGEBRAICA: Para resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas existen varios métodos; utilizaremos sólo dos de ellos: sustitución y reducción.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN: Se debe **despejar** una de las variables en una de las ecuaciones y luego **reemplazarla** en la otra ecuación, generándose así una ecuación con una incógnita.

MÉTODO DE REDUCCIÓN: Se deben **igualar** los coeficientes de una de las incógnitas, en ambas ecuaciones, multiplicando ambos miembros convenientemente, obteniéndose un sistema equivalente al dado, y luego se suman o restan ambas ecuaciones, resultando así una ecuación con una incógnita.

EJEMPLOS

1. Sea el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y = -2 \\ 2x - 3y = -5 \end{array}\right|$ despejando **x** en una de las ecuaciones y sustituyéndola en la otra, se obtiene

   A) $5y + 9 = 0$
   B) $5y + 1 = 0$
   C) $5y - 1 = 0$
   D) $4y - 1 = 0$
   E) $y - 1 = 0$

2. En el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -1 \\ 5x - 7y = 16 \end{array}\right|$ al eliminar la incógnita **y** por el método de reducción se obtiene

   A) $23 + 9x = 0$
   B) $23 - 9x = 0$
   C) $9x + 9 = 0$
   D) $6x - 23 = 0$
   E) $19x - 23 = 0$

ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Sea el sistema: $\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}\right|$. Entonces:

- El sistema tiene **solución única** si $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$
- El sistema tiene **infinitas soluciones** si $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$
- El sistema **no tiene solución** si $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

EJEMPLOS

1. En el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x - ky = 5 \\ 4x - y = 15 \end{array}\right|$, ¿qué condición debe cumplir **k** para que tenga **solución única?**

   A) $k \neq 1$
   B) $k = \dfrac{1}{2}$
   C) $k = -\dfrac{1}{2}$
   D) $k \neq -\dfrac{1}{2}$
   E) $k \neq \dfrac{1}{2}$

2. ¿Para qué valor de **k** el sistema $\left.\begin{array}{r} 5x - ky = 2 \\ 3x + 2y = 3 \end{array}\right|$ **no tiene** solución**?**

   A) $-\dfrac{4}{3}$
   B) $-\dfrac{10}{3}$
   C) 2
   D) $\dfrac{10}{3}$
   E) 5

APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Los sistemas de ecuaciones tienen aplicación en problemas de planteo. Si el enunciado implica dos incógnitas, dicho problema podrá ser resuelto mediante un sistema de ecuaciones. Cómo por ejemplo: problemas de edades, de cifras o dígitos, etc.

EJEMPLOS

1. Un cuarto de la suma de dos números es 81 y un tercio de su diferencia es 54. El doble del menor es

   A) 72
   B) 81
   C) 162
   D) 243
   E) 486

2. La edad de Juan es el doble que la de Fernando, y hace 5 años tenía el triple de la edad que tenía Fernando. ¿Cuál será la edad de Fernando dentro de 5 años?

   A) 5 años
   B) 10 años
   C) 15 años
   D) 20 años
   E) 25 años

3. En un negocio se venden sólo bicicletas y triciclos. Entre bicicletas y triciclos hay 35 ruedas en total. El número de bicicletas menos el número de triciclos es 10. ¿Cuánto suman las bicicletas y los triciclos?

   A) 12
   B) 13
   C) Menos de 12
   D) Más de 13
   E) Ninguna de las anteriores

EJERCICIOS

1. Para que el par ordenado (1,-2) sea solución del sistema $\left.\begin{array}{r} kx - y = 4 \\ 2x + 3ty = -4 \end{array}\right|$, los valores de **k** y **t** deben ser respectivamente

A) 6 y 1
B) 6 y -1
C) 6 y $-\frac{1}{3}$
D) 2 y 1
E) 2 y -1

2. Si $\left.\begin{array}{r} 13x + 2y = 44 \\ 12x - y = 15 \end{array}\right|$, entonces 37x =

A) 2
B) 9
C) 59
D) 74
E) 333

3. Si $\left.\begin{array}{r} cx + dy = c \\ dx + cy = d \end{array}\right|$ con $c \neq d$, entonces $x - y$ =

A) -1
B) 1
C) c – d
D) $\frac{c + d}{c - d}$
E) $\frac{c - d}{c + d}$

4. Si $\left.\begin{array}{l} m + n = a \\ m - n = b \end{array}\right|$, entonces $4mn =$

A) $a^2 - b^2$
B) $(a - b)^2$
C) $(a + b)^2$
D) $a - b$
E) $4a^2 - 4b^2$

5. Si $\left.\begin{array}{r} x - y - p = 0 \\ x - 2y + 3p = 0 \end{array}\right|$, entonces $\frac{x}{y} =$

A) -2
B) $-\frac{5}{4}$
C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{4}{5}$
E) $\frac{5}{4}$

6. Si $\left.\begin{array}{l} ax + by = a^2 + ab \\ bx + ay = b^2 + ab \end{array}\right|$ con $a \neq -b$, entonces $x + y =$

A) 0
B) $a - b$
C) $a + b$
D) $(a - b)^2$
E) $(a + b)^2$

7. Si el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x - 3y = 2 \\ 5x + ky = 7 \end{array}\right|$ tiene solución única, entonces **k** es

A) cualquier valor real
B) igual a -15
C) igual a $-\dfrac{21}{2}$
D) distinto de $-\dfrac{21}{2}$
E) distinto de -15

8. Si el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x - 15y = 5 \\ x + by = 4 \end{array}\right|$ no tiene solución, entonces **b** es

A) igual a -5
B) distinto de -12
C) igual a -12
D) distinto de -5
E) igual a -45

9. Dado el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x - cy = 5 \\ 3y - 5 = -2x \end{array}\right|$. Entonces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) Si $c = \dfrac{10}{3}$, el sistema no tiene solución.
II) Si $c = -3$, el sistema tiene solución.
III) Si $c \neq -3$, el sistema tiene solución única.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

10. Dos pasteles y un chocolate cuestan \$ 920 y tres pasteles y un chocolate cuestan \$ 1.270. ¿Cuánto cuesta un pastel?

A) \$ 700
B) \$ 500
C) \$ 440
D) \$ 420
E) \$ 350

11. La diferencia entre dos ángulos complementarios es 50º. Entonces, la suma entre el mayor y el doble del menor es

A) 70º
B) 110º
C) 140º
D) 160º
E) 180º

12. Juan compra 13 fichas en un casino, entre verdes y rojas. Las fichas verdes valen \$ 800 y las rojas valen \$ 300. Si el total gastado en ellas fue \$ 6.900, entonces ¿cuántas fichas verdes compró?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 10
E) 13

13. ¿Cuántas unidades mayor es **x** que **y**?

(1) $2x = 3y + 12$

(2) $2y = 2x - 14$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

14. El sistema $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 9 \\ 4x + ky = p \end{array}\right|$ tiene infinitas soluciones si:

(1) $p = 18$

(2) $k = 10$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

15. La colecta de la Cruz Roja en una escuela primaria reunió $ 45.000 , sólo en monedas de $ 50 y $ 100. Se puede conocer el número de alumnos que tiene la escuela si:

(1) Todos los alumnos donaron una moneda.

(2) El total de los alumnos es un múltiplo de 9.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3
1	E	C	
2	D	A	
3	C	A	
4	E	B	
5	C	C	D

CLAVES PÁG. 6

1. D	6. C	11. B
2. D	7. E	12. A
3. B	8. A	13. B
4. A	9. D	14. C
5. E	10. E	15. E

DSEMA19