C u r s o : Matemática

Material N° 26

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 20

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

RAÍCES

DEFINICIÓN 1: Si **n** es un entero par positivo y **a** es un real no negativo, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el único real **b** , no negativo, tal que $b^n = a$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ b \geq 0}$$

DEFINICIÓN 2: Si **n** es un entero impar positivo y **a** es un real cualquiera, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el único real **b** tal que $b^n = a$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ b \in \mathrm{IR}}$$

OBSERVACIONES:

- Si **n** es un entero par positivo y **a** es un real negativo, entonces $\sqrt[n]{a}$ **NO ES REAL.**
- La expresión $\sqrt[n]{a^k}$, con **a** real no negativo, se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}}$$

- $$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|, \text{ para todo número real}}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt{16} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{-32} =$

A) 14
B) 6
C) 4
D) 2
E) 0

2. ¿Cuál(es) de las siguientes raíces representa(n) un número real?

I) $\sqrt[3]{-2}$
II) $\sqrt[4]{-16}$
III) $\sqrt[5]{-1}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

PROPIEDADES

Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ están definidas en IR, se cumplen las siguientes propiedades:

② **MULTIPLICACIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE**

$$\boxed{\sqrt[n]{\mathbf{a}} \cdot \sqrt[n]{\mathbf{b}} = \sqrt[n]{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}}$$

② **DIVISIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE**

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{\mathbf{a}}}{\sqrt[n]{\mathbf{b}}} = \sqrt[n]{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}, \quad \mathbf{b} \neq \mathbf{0}}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[3]{5\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3}} =$

A) 15
B) $\sqrt[9]{25\sqrt[4]{3}}$
C) $\sqrt[3]{25\sqrt{3}}$
D) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}}$
E) $\sqrt[3]{75}$

2. $\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{a}{b^3}}}{\sqrt[4]{\dfrac{b}{a^3}}} =$

A) 1
B) $\dfrac{a}{b}$
C) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^4$
D) $\sqrt{\dfrac{1}{ab}}$
E) $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$

PROPIEDADES

② **POTENCIA DE UNA RAÍZ**

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \quad a > 0}$$

② **RAÍZ DE UNA RAÍZ**

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[3]{8^4}$ =

A) 2^3
B) 2^4
C) 2^6
D) 2^{12}
E) 2^{36}

2. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ =

A) 2
B) 4
C) 8
D) $\sqrt[5]{64}$
E) $\sqrt[6]{8}$

3. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{-2}}$ =

A) $-\sqrt[9]{2}$
B) $\sqrt[9]{2}$
C) $-\sqrt[20]{2}$
D) $\sqrt[20]{2}$
E) No es un número real

PROPIEDADES

② **AMPLIFICACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DEL ORDEN DE UNA RAÍZ**

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}, \quad m \in \square^{+}, \quad a \in IR^{+}}$$

② **PRODUCTO DE RAÍCES DE DISTINTO ÍNDICE**

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m \cdot b^n}, \quad a, \ b \in IR^{+}}$$

② **FACTOR DE UNA RAÍZ COMO FACTOR SUBRADICAL**

$$\boxed{b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}, \quad b \in IR^{+}}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{2} =$

   A) $\sqrt[8]{16}$
   B) $\sqrt[6]{16}$
   C) $\sqrt[4]{16}$
   D) $\sqrt[4]{32}$
   E) $\sqrt{8}$

2. $2 \cdot \sqrt[3]{3} =$

   A) $\sqrt[3]{36}$
   B) $\sqrt[3]{24}$
   C) $\sqrt[3]{18}$
   D) $\sqrt[3]{12}$
   E) $\sqrt[3]{6}$

3. Si $x > 0$, entonces $2\sqrt{18x^2} - \sqrt{32x^2} - 3x\sqrt{2} =$

   A) $-x\sqrt{2}$
   B) $x\sqrt{2}$
   C) $-2x\sqrt{2}$
   D) $2x\sqrt{2}$
   E) $3x\sqrt{2}$

RACIONALIZACIÓN

Racionalizar el denominador de una fracción consiste en transformarla en una fracción equivalente cuyo denominador no contenga ninguna raíz.

CASO 1: Fracciones de la forma $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}\sqrt{\mathbf{c}}}$

CASO 2: Fracciones de la forma $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{p}\sqrt{\mathbf{b}} + \mathbf{q}\sqrt{\mathbf{c}}}$

EJEMPLOS

1. $\dfrac{6}{5\sqrt{3}} =$

   A) $\dfrac{6}{5}\sqrt{3}$
   B) $2\sqrt{3}$
   C) $\dfrac{2}{5}\sqrt{3}$
   D) $\dfrac{2}{5}$
   E) $-\dfrac{6}{5}\sqrt{3}$

2. $\dfrac{12}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} =$

   A) $24\sqrt{3} + 36\sqrt{2}$
   B) $24\sqrt{3} - 36\sqrt{2}$
   C) $-4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$
   D) $6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$
   E) $4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

ORDENACIÓN DE RAÍCES

Algunos métodos para ordenar expresiones que contienen raíces son las siguientes:

② Cálculo de cada expresión, con los valores exactos o aproximados de cada raíz.

② Si se tienen raíces positivas de igual índice con factores distintos de 1, los factores se ingresan a la raíz como factores subradicales.

② Si las expresiones contienen raíces en los denominadores, estos se racionalizan.

EJEMPLOS

1. La figura 1 muestra un triángulo equilátero de lado 4 y área **x**, un rectángulo de ancho $\sqrt{2}$, largo 5 y área **y**, y un triángulo de catetos 2 y 7 y área **z**. Entonces, se cumple que

A) $x < y < z$
B) $y < z < x$
C) $z < y < x$
D) $y < x < z$
E) $x < z < y$

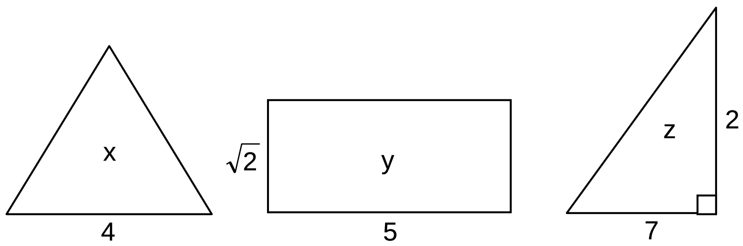

fig. 1

2. El orden decreciente de los números $a = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $b = \dfrac{10}{3\sqrt{5}}$ y $c = \dfrac{15}{\sqrt{125}}$, es

A) b, c, a
B) b, a, c
C) a, c, b
D) a, b, c
E) c, b, a

EJERCICIOS

1. $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{4} =$

   A) $\sqrt[5]{-4}$
   B) $\sqrt[6]{-4}$
   C) 0
   D) -4
   E) 4

2. $\sqrt{0,09}$ corresponde a

   A) 0,003
   B) 0,018
   C) 0,03
   D) 0,18
   E) 0,3

3. El valor de $5\sqrt{12} - 2\sqrt{27}$, es

   A) $-8\sqrt{3}$
   B) $-4\sqrt{3}$
   C) $4\sqrt{3}$
   D) $2\sqrt{3}$
   E) $\sqrt{3}$

4. $5\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{8} =$

   A) $20\sqrt{14}$
   B) $80\sqrt{3}$
   C) $50\sqrt{3}$
   D) $40\sqrt{3}$
   E) $20\sqrt{3}$

5. Si $\sqrt{x} = 2\sqrt{2}$, el valor de $\sqrt{9} \cdot x$, es

A) 72
B) 24
C) $6\sqrt{2}$
D) $\sqrt{72}$
E) $2\sqrt{18}$

6. ¿Cuál(es) de las siguientes raíces representa(n) un número real?

I) $\sqrt[4]{-1}$
II) $\sqrt[5]{-32}$
III) $\sqrt{7}$

A) Sólo II
B) Sólo III
C) Sólo II y III
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas

7. $\sqrt{3\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{3\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$

A) 5
B) 25
C) $-\sqrt{25}$
D) $\sqrt{5}$
E) $6\sqrt{3}$

8. $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt{2 \times \sqrt[3]{2}}} =$

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt[3]{2}$
C) $\sqrt[6]{2}$
D) 1
E) 2

9. $\dfrac{\sqrt{4^5+4^5+4^5+4^5}}{\sqrt[3]{4^5+4^5+4^5+4^5}} =$

A) 4

B) $4\frac{5}{6}$

C) 1

D) $4\frac{2}{3}$

E) $4\frac{3}{2}$

10. Si **a** y **b** son enteros positivos, la expresión $\dfrac{b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}$ es equivalente a

A) $\dfrac{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})b}{b+2a}$

B) $\sqrt{b+2a}$

C) $\dfrac{b+\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$

D) $\sqrt{b}$

E) $\dfrac{b\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b}\right)}{a}$

11. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) un número real?

I) $\sqrt{2\sqrt{5}-5}$

II) $\sqrt{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

III) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo II y III
E) Todas ellas

12. ¿Cuál es el orden creciente de los números $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{4}{3\sqrt{2}}$ y $c = \frac{3}{4}$?

A) a, b, c
B) a, c, b
C) c, a, b
D) b, c, a
E) b, a, c

13. $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} =$

A) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$
B) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$
C) $\sqrt{5} - \sqrt{6}$
D) $-\sqrt{5} - \sqrt{6}$
E) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{-11}$

14. Si $1 + \sqrt{x} = b$, con $b \geq 1$, entonces $x + 1$ en función de b , es

A) $b^2 - 2b + 1$
B) $b^2 - 2b + 2$
C) $b^2 - 2b - 2$
D) $b^2 + 2b - 2$
E) $b^2 + 2b + 2$

15. La expresión $\frac{1}{\sqrt{2(a-b)}}$ es real, si:

(1) $b - a < 0$

(2) $2a - 2b \neq 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Ejemplos / Págs.	1	2	3
1	C	D	
2	E	B	
3	B	A	E
4	D	B	A
5	C	C	
6	E	A	

CLAVES PÁG. 7

1. C	6. C	11. D
2. E	7. A	12. B
3. C	8. D	13. D
4. B	9. A	14. B
5. B	10. E	15. A

DSEMA26