Material N° 22

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 17

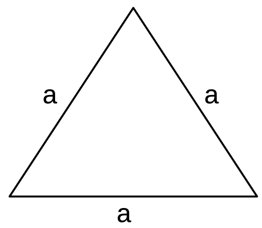
UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

FUNCIONES

Noción de Función mediante una fórmula.

Se tiene un triángulo equilátero cuyo lado mide **a**. Al designar por **p** el perímetro, se puede establecer, entre **a** y **p**, una relación expresada en la siguiente fórmula (regla o ley):

$$\boxed{\mathbf{p = 3a}}$$



Al confeccionar la siguiente tabla:

a(cm)	1	2	3	12,5	15
p(cm)	3	6	9	37,5	45

se puede observar que:

- la medida del perímetro depende de la medida del lado del triángulo.
- tanto **a** como **p** son magnitudes variables.
- todos los valores de **a** están asociados a valores de **p**.
- a cada valor de **a** le está asociado un único valor de **p**.

Entonces, se puede decir: “la medida **p** del perímetro del triángulo equilátero está dada **en función** de la medida **a** del lado”.

La relación **p = 3a** es la fórmula matemática o la ley de asociación de esta función y, en ella se tiene que: **p** es la variable **dependiente**.
a es la variable **independiente**.

EJEMPLO

En un cuadrado de área **Á**, la medida de la diagonal es **d**. ¿Qué fórmula relaciona **Á** con **d**?

A) $Á = a^2$
B) $Á = d^2$
C) $Á = \frac{d^2}{2}$
D) $Á = 2d^2$
E) $Á = \sqrt{2}d$

Noción y Definición de Función mediante conjuntos.

Sean A = {-1, 0, 1, 2} y B = {-4, -1, 2, 5, 8} dos conjuntos, en donde los elementos de A están relacionados con los elementos de B, mediante la fórmula y = 3x – 1, con x∈A e y∈B.

En el gráfico de la figura 1, se observa que:

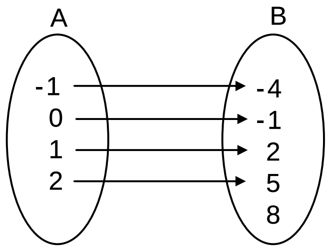


fig. 1

- todos los elementos de A están asociados a elementos de B.
- cada elemento de A está asociado a un único elemento de B.

  De lo anterior, la relación expresada por y = 3x – 1, es una **función de A en B.**

DEFINICIÓN

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y **f** una relación de A en B.
Diremos que **f** es una **función** si a **cada elemento** x∈A se le asigna **uno y sólo un elemento** y∈B.

OBSERVACIONES

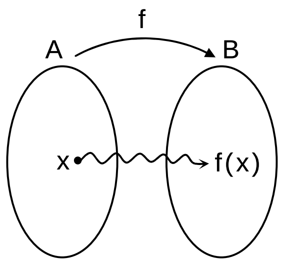
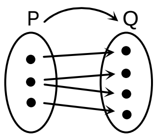


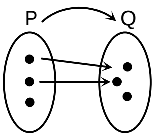
fig. 2

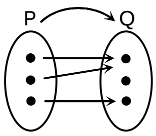
- Si f es una función de A en B se anotará f: A → B.
- Para cada elemento x∈A se usará la notación f(x) (se lee: f de x) para indicar al único elemento y∈B, que ha sido asignado a x (fig. 2).
- **y** es la **imagen** de **x** mediante **f**, lo cual se escribe y = f(x), mientras que **x** es la **preimagen** de **f(x)**.
- En la expresión y = f(x), **x** es la variable independiente e **y** es la variable dependiente.

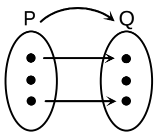
EJEMPLOS

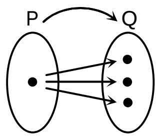
1) ¿Cuál de las figuras siguientes representa una función de P en Q?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

2) Sea f: IR → IR, una función definida por f(x) = 3x + 2. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$

II) La imagen de 0 es $\frac{-2}{3}$.

III) La preimagen de 11 es 3.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

Dominio de una función:
Es el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable independiente y se denota **Dom(f)**.

Recorrido de la función:
Es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente y se denota **Rec(f)**.

Función Creciente:
Es cuando al aumentar la variable independiente, también aumenta la variable dependiente.

Función Decreciente:
Es cuando al aumentar la variable independiente, la variable dependiente disminuye.

EJEMPLOS

1. Sea $f : IR \to IR$ una función definida por $f(x) = \dfrac{2}{x + 2}$.

a) Dominio

$\dfrac{2}{x + 2} \in IR$ sólo si $(x + 2) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq -2$

$\therefore$ Dom(f) = IR – {-2}

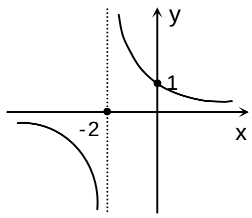
b) Recorrido (se despeja x en función de y)

$y = \dfrac{2}{x + 2} \Rightarrow x = \dfrac{2 - 2y}{y}$

$\dfrac{2 - 2y}{y} \in IR$ sólo si $[(2 - 2y) \in IR \wedge y \neq 0]$

$\therefore$ Rec(f) = IR – {0}

c) Gráfico de f(x)



2. a) La función $f(x) = 2x - 3$ es creciente ya que:

para que $x_1 = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

para que $x_2 = 6 \Rightarrow f(6) = 2 \cdot 6 - 3 = 9$

Es decir, al aumentar la variable independiente, la variable dependiente también aumenta.

$(x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1))$

b) La función $f(x) = -x^3$ es decreciente ya que:

para que $x_1 = 2 \Rightarrow f(2) = -2^3 - 8$

para que $x_2 = 3 \Rightarrow f(3) = -3^3 = -27$

Es decir, al aumentar la variable independiente, la variable dependiente disminuye.

$(x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1))$

3. Con respecto al gráfico de la función f de la figura 1, ¿cuál de las siguientes alternativas es **falsa**?

A) Dom(f) = [-2, 3]
B) Rec(f) = [-2, 2]
C) f es decreciente en [2, 0]
D) f es creciente en [-2, -1]
E) f no es creciente ni decreciente en [-1, 1]

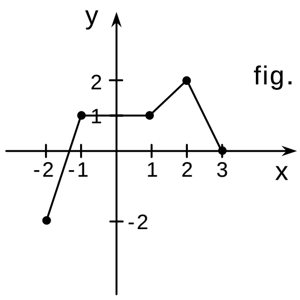


fig. 1

TIPOS ESPECIALES DE FUNCIONES

FUNCIONES PARES: Son aquellas que adquieren el mismo valor para un **x** cualquiera y su opuesto.

$$\boxed{\mathbf{f(x) = f(-x)}}$$

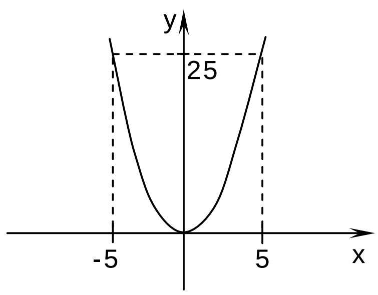
FUNCIONES IMPARES: Son aquellas que adquieren valores opuestos para un **x** cualquiera y su opuesto.

$$\boxed{\mathbf{f(x) = -f(-x)}}$$

OBSERVACIÓN: Las funciones pares tienen una gráfica que es simétrica respecto al eje de las ordenadas, mientras que las funciones impares tienen gráficas simétricas respecto del origen

EJEMPLOS

1. La función $y = x^2$ es par, dado que

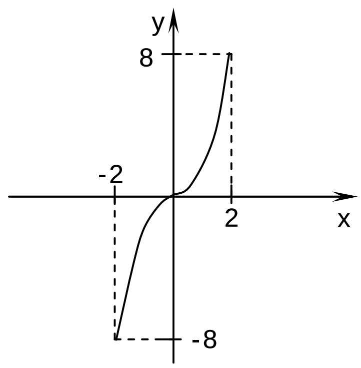


$f(5) = f(-5)$

$(5)^2 = (-5)^2$

$25 = 25$

2. La función $y = x^3$ es impar, puesto que



$f(2) = -f(-2)$

$(2)^3 = -(-2)^3$

$8 = 8$

3. ¿Cuál de las siguientes funciones, es función par?

A) $f(x) = x^2 - 4$
B) $f(x) = x^2 + 2x + 1$
C) $f(x) = x$
D) $f(x) = 2^x$
E) $f(x) = \frac{x}{2}$

FUNCIÓN PARTE ENTERA

$$\boxed{\mathbf{f(x) = [\,x\,] \quad con \;\; x \in IR.}}$$

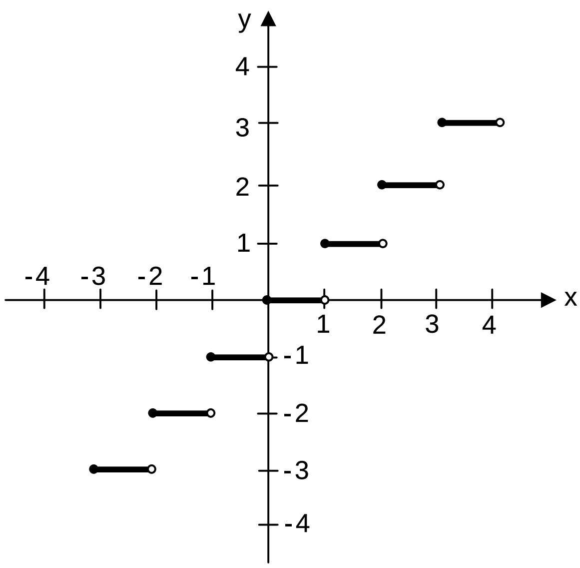
Dado que todo número real tiene una parte entera y una parte decimal, por ejemplo el número 6,215 , esta función persigue que al número real 6,215 se le asocie el número real 6.

En general, dado un número real **x** , existe un número entero **n** tal que $n \leq x < n + 1$, donde la parte entera de **x** es **n** , y se expresa por $[\,x\,] = n$

Su representación gráfica es

$f(x) = [\,x\,]$

x	**f(x)**
-1,7	-2
-1	-1
-0,3	-1
0	0
0,5	0
1	1
1,6	1
2	2
2,3	2

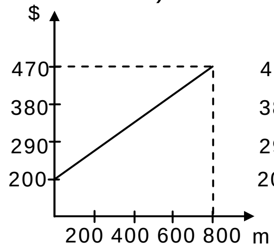


OBSERVACIÓN: A la gráfica de esta función se le llama **"función escalonada".**

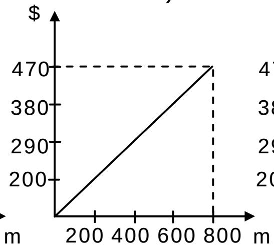
EJEMPLO

¿Cuál es la gráfica que muestra el cobro de un taxi cuya bajada de bandera es $ 200 con lo que quedan cancelados los primeros 200 metros y cada 200 metros adicionales el taxímetro sube $ 90?

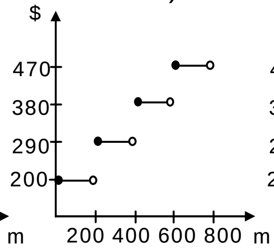
A)



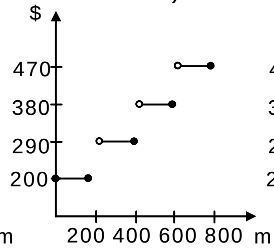
B)



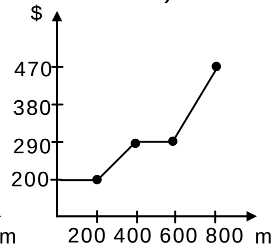
C)



D)



E)

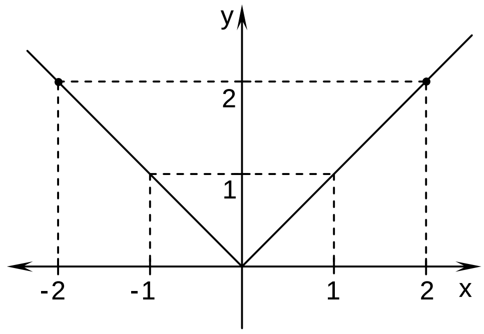


FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número **x** $\in$ **IR**, denotado por | **x** |, es siempre un número real **no negativo**.

Se define la función valor absoluto de **x**, por

$$\boxed{\mathbf{f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}}$$



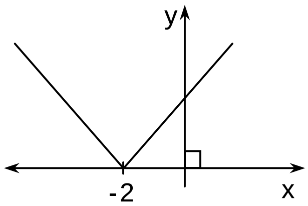
Su representación gráfica es

x	-2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	2
f(x)	2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	2

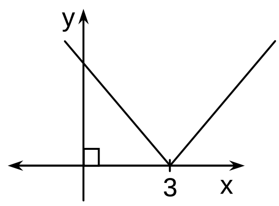
EJEMPLOS

1. Observe los siguientes gráficos de las funciones dadas

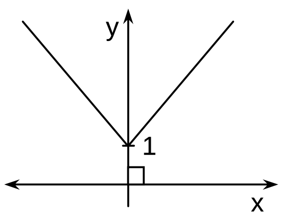
② f(x) = | x + 2 |



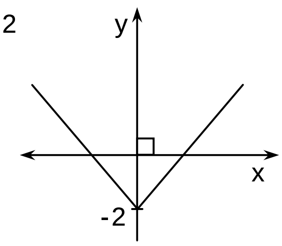
② f(x) = | x – 3 |



② f(x) = | x | + 1

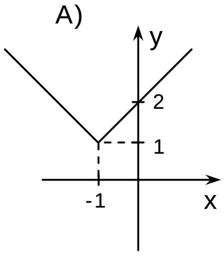


② f(x) = | x | – 2

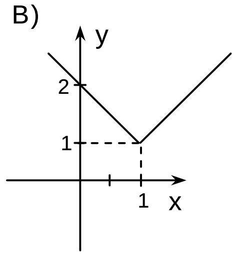


2. El gráfico que mejor representa a f(x) = | x – 1 | + 1, es

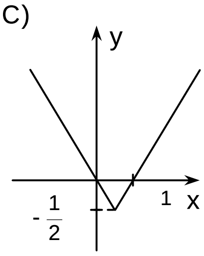
A)



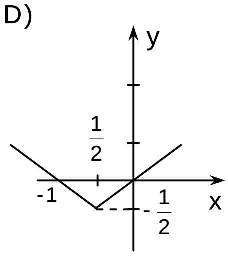
B)



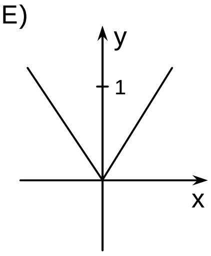
C)



D)



E)



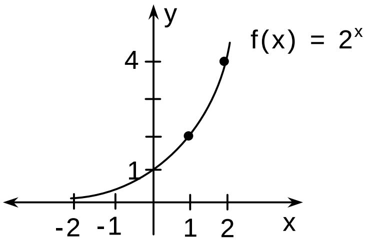
FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función **f** definida por $\boxed{\mathbf{f(x) = a^x, \text{ con } a \in IR^+ \text{ y } a \neq 1}}$ se denomina **función exponencial.**

GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

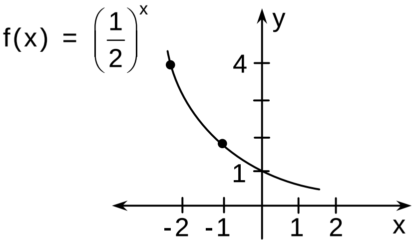
1) $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



En las gráficas se puede observar que:

- La gráfica intersecta al eje de las ordenadas en el punto (0, 1).
- Si $a > 1$, entonces $f(x) = a^x$ es creciente.
- Si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$ es decreciente.
- La gráfica no corta al eje de las abscisas.

EJEMPLO

Con respecto a la función $f(x) = 5^x$, ¿cuál de las siguientes opciones es **falsa**?

A) La función f(x) es creciente
B) $f(2) = 25$
C) La gráfica no intersecta al eje de las abscisas
D) La gráfica intersecta al eje de las ordenadas en el punto (1, 0)
E) $f(-2) < f(2)$

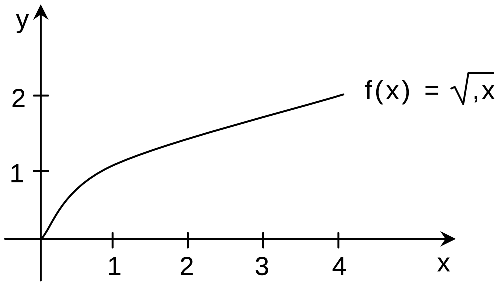
FUNCIÓN RAÍZ

Si **x** es un número real no negativo, se define la función raíz cuadrada de **x** por

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$$

Su representación gráfica es

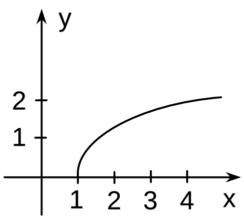
x	f(x)
0	0
0,5	0,70..
1	1
1,5	1,22..
2	1,41..
2,5	1,58..
3	1,73..
3,5	1,87..
4	2

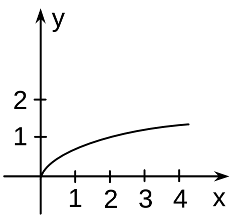


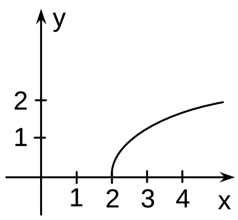
OBSERVACIÓN: ② La función es creciente.
② La función raíz cuadrada es considerada como un modelo de crecimiento lento.

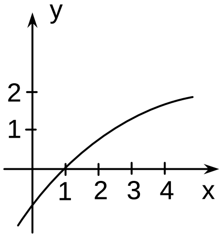
EJEMPLO

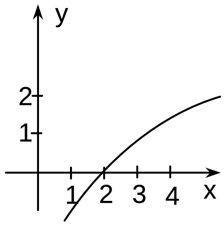
El gráfico que mejor representa a la función $h(x) = \sqrt{x-2}$, es

A)


B)


C)


D)


E)


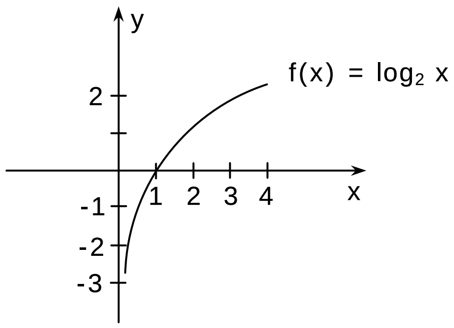
FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Una función **f** definida por $\boxed{\mathbf{f(x) = \log_a x, \quad con \ a \in IR^+, \ a \neq 1 \ \ y \ \ x > 0}}$ se denomina **función logarítmica.**

GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

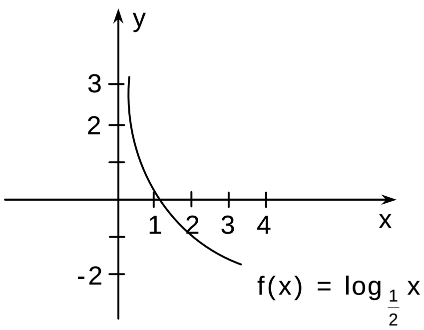
i) $f(x) = \log_2 x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3



ii) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f(x)	3	2	1	0	-1	-2	-3



En los gráficos se puede observar que:

- La gráfica intersecta al eje x en el punto (1, 0).
- Si $a > 0$, entonces $f(x) = \log_a x$ es creciente.
- Si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = \log_a x$ es decreciente.
- La curva no intersecta al eje y.

EJEMPLO

Respecto a la función $f(x) = \log_2 (x + 1)$, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

I) Si $x = -1$, $f(x) = 1$
II) Si $x = 0$, $f(x) = 0$
III) Si $f(x) = 2$, $x = 3$

A) Sólo II
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) Sólo II y III

APLICACIONES LINEALES

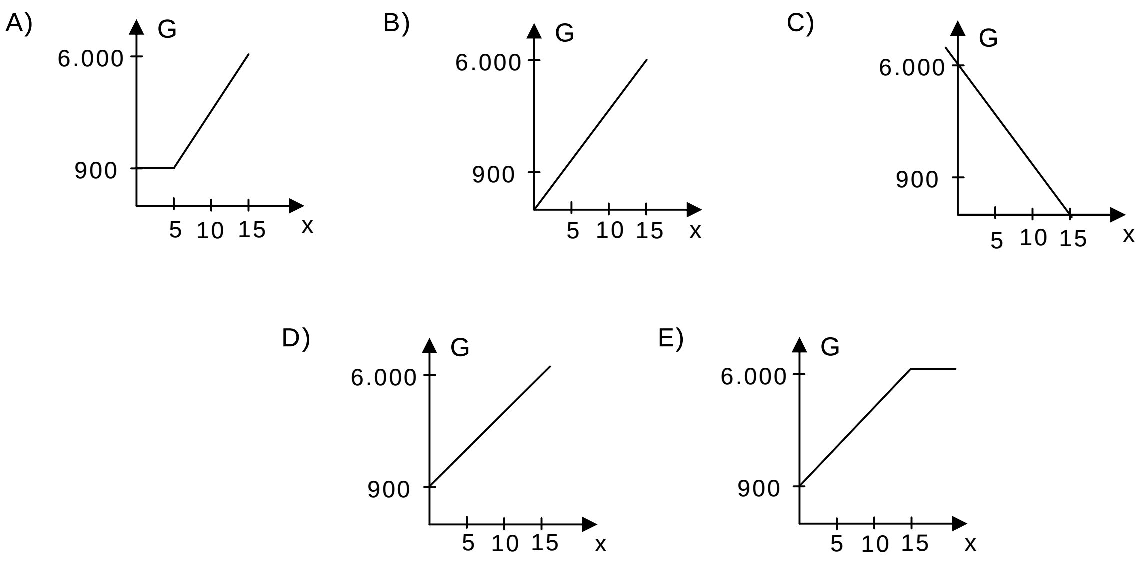
En el quehacer cotidiano hay muchos problemas que se tratan con funciones y por ende es necesario saber expresar una situación práctica en términos de una relación funcional. La función que se obtiene produce un **modelo matemático** de la situación.

EJEMPLOS

1. En una cuenta del agua potable se consigna un cargo fijo de \$ 900. Sabiendo que el modelo de cálculo de tarifas es un modelo lineal y que por un consumo de 15 m^3 se facturó el mes pasado \$ 6.000, ¿cuál es la función lineal que permite calcular el costo **G** de **x** m^3 de agua?

   A) $G = 900 + \dfrac{6.000}{15}x$
   B) $G = 900 + 15 \cdot 6.000x$
   C) $G = 900 - 15 \cdot 6.000x$
   D) $G = 900 + \dfrac{6.000 - 900}{15}x$
   E) $G = 900 - \dfrac{6.000 - 900}{15}x$

2. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la situación anterior?



EJERCICIOS

1. El conductor de un vehículo, a la entrada de un estacionamiento pregunta por la tarifa. El funcionario a cargo le responde que deberá cancelar $ 750 por la primera hora y, $ 700 por cada hora siguiente o fracción. ¿Cuánto tiempo podrá permanecer el vehículo en el estacionamiento si el conductor dispone hasta $ 2.000?

   A) 1 hora y 15 minutos
   B) 1 hora y 30 minutos
   C) 2 horas
   D) 2 horas y 30 minutos
   E) 3 horas

2. La ecuación $3d + 5t = 30$ representa la distancia **d**, en metros, y el tiempo **t**, en minutos, del viaje de una tortuga. ¿Cuánto tiempo emplea en ubicarse a 6 metros del punto de partida?

   A) 3 minutos
   B) 2,5 minutos
   C) 2,4 minutos
   D) 2 minutos
   E) Ninguna de las anteriores

3. Para broncearse en el verano se recomienda partir con 15 minutos de exposición al sol el primer día, con la debida protección según la piel de cada uno y, gradualmente ir aumentando 1 minuto por cada día siguiente, hasta un máximo de media hora. La ecuación que relaciona el tiempo **t** de bronceado para el día **d**, es

   A) $t = 0{,}15 + d$
   B) $t = 1{,}50 + d$
   C) $t = 15 + d$
   D) $t = 15d + 15$
   E) $t = 15 + (d - 1)$

4. Para estucar un edificio, los albañiles hacen el siguiente detalle de gastos:
   a) La mezcla (cemento, arena y agua) vale $ 750, y demora 15 minutos en usarla.
   b) La mano de obra vale $ 3.500 la hora.
   c) El uso de equipos es un costo fijo de $ 2.000.

   La ecuación para determinar el gasto (C) del trabajo en un cierto tiempo t, expresado en horas, es

   A) $C = 3.000\ t + 2.000$
   B) $C = 3.500\ t + 2.000$
   C) $C = 5.000\ t + 2.500$
   D) $C = 5.500\ t + 2.500$
   E) $C = 6.500\ t + 2.000$

5. Una empresa contrata a un empleado por 50 días, pagándole \$ 36.000 por cada día completo trabajado y con la condición de que por cada día trabajado parcialmente se rebaja de este salario \$ 24.000. Finalizado el trabajo, el empleado recibió \$ 1.080.000. La ecuación que relaciona los días completos trabajados (x) respecto del dinero recibido es

A) $36.000x + 12.000(50 – x) = 1.080.000$
B) $36.000x + 24.000(50 – x) = 1.080.000$
C) $36.000x – 24.000(50 – x) = 1.080.000$
D) $36.000x – 12.000(50 – x) = 1.080.000$
E) $6.000x – 4.000(50 – x) = -120.000$

6. Dos empresas A y B ofrecen las siguientes ofertas de conexión a internet:

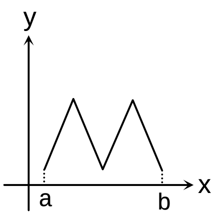
A: \$ 9.000 por 40 horas + \$ 900 por cada hora adicional.

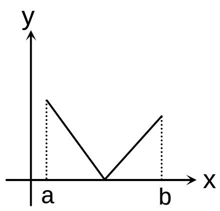
B: \$ 10.500 por 40 horas + \$ 600 por cada hora adicional.

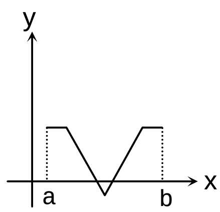
¿Al cabo de cuántas horas daría lo mismo usar cualquiera de los dos servicios?

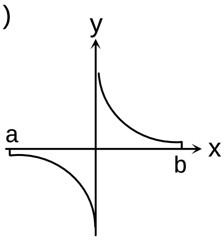
A) 5
B) 45
C) 50
D) 55
E) 60

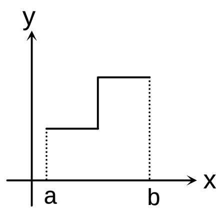
7. ¿Cuál de los siguientes gráficos no representa una función en el intervalo [a,b]?

A)


B)


C)


D)


E)


8. El gráfico de la figura 1, muestra una función f(x). ¿Cuál(es) de las afirmaciones siguientes es(son) verdadera(s) con respecto f(x)?

I) Es creciente en el intervalo [a, c].
II) Es decreciente en el intervalo [c, d].
III) Es constante en el intervalo [b, c].

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

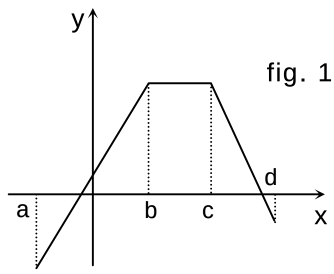


fig. 1

9. El cargo fijo de una cuenta por consumo de agua es de $ 590. Si el metro cúbico de agua potable vale $ 250 y, por el uso de alcantarillado se cobra $ 70 por cada metro cúbico, ¿cuál fue el consumo, en m^3, sabiendo que se canceló por la cuenta $ 6.990?

A) 18
B) 20
C) 21
D) 25
E) 30

10. Una industria contrata un servicio mensual de transporte, el cual aplica el gráfico de la figura 2 en el cobro de sus tarifas, según los kilómetros recorridos.

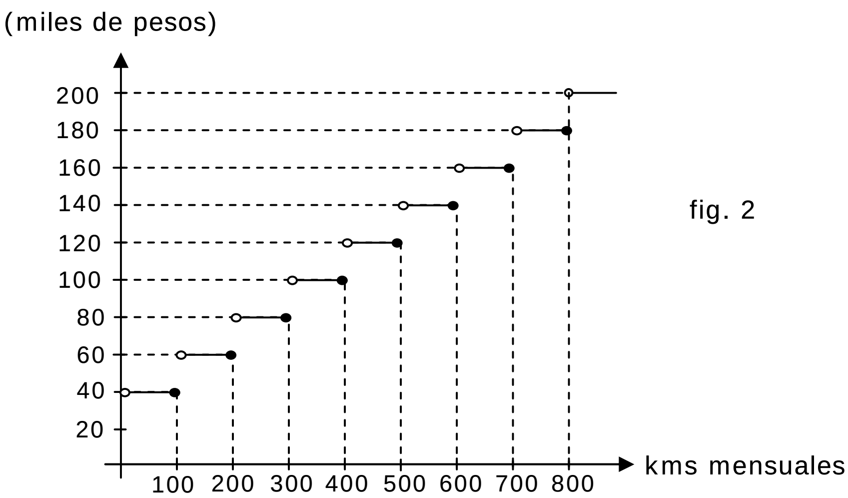
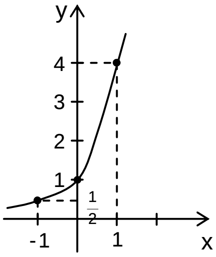


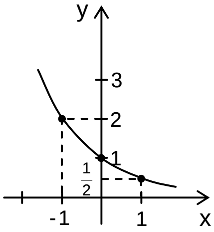
fig. 2

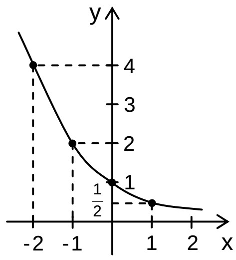
¿Cuánto debe pagar la industria al término del mes si el promedio de kilómetros recorridos en los primeros 20 días del mes fue de 20 km y en los 10 días siguientes fue de 15 km?

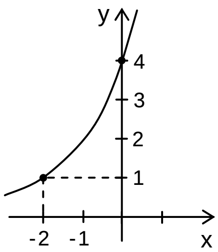
A) $ 60.000
B) $ 100.000
C) $ 120.000
D) $ 140.000
E) $ 160.000

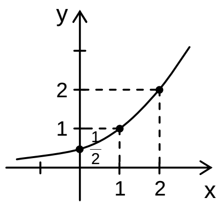
11. El gráfico de la función $f(x) = 2^{x-1}$ está mejor representado por la alternativa

A) 

B) 

C) 

D) 

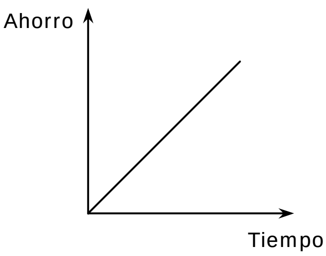
E) 

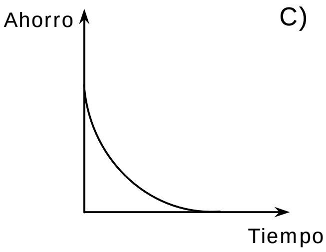
12. La siguiente tabla, muestra el ahorro que posee una persona y el decrecimiento de éste, originados por los gastos semanales efectuados.

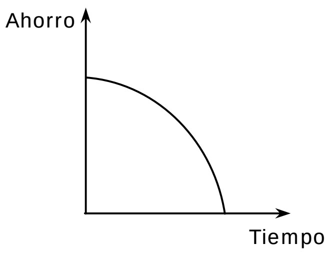
SEMANAS TRANSCURRIDAS	**AHORROS**
0	\$ 200.000
1	\$ 180.000
2	\$ 160.000
3	\$ 140.000
4	\$ 120.000
5	\$ 100.000

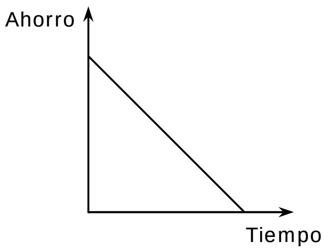
fig. 3

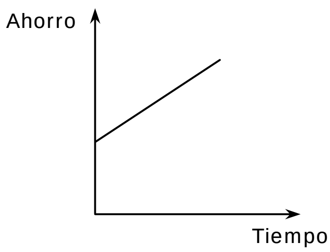
¿Cuál gráfico representa mejor esta situación de continuar así?

A) 

B) 

C) 

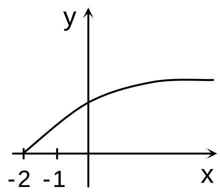
D) 

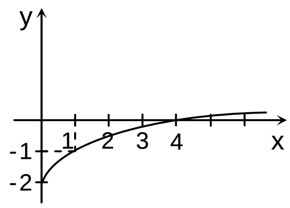
E) 

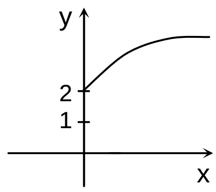
13. En un plan de telefonía celular se pagan $ 26.000 por hablar 100 minutos y $ 40.000 por hablar 200 minutos. Si estas variables se relacionaban de manera lineal, ¿cuánto se pagaría por hablar 500 minutos?

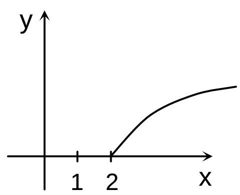
A) $ 72.000
B) $ 82.000
C) $ 92.000
D) $ 100.000
E) $ 130.000

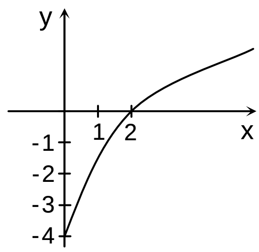
14. La función $f(x) = \sqrt{x} - 2$ está mejor representada en la opción

A)


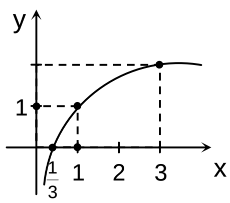
B)


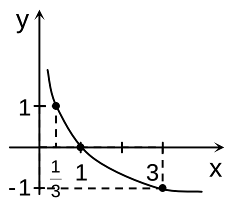
C)


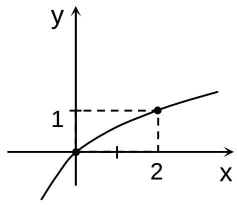
D)


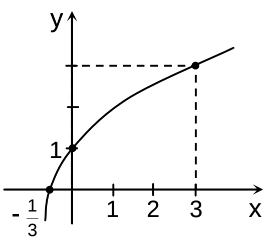
E)


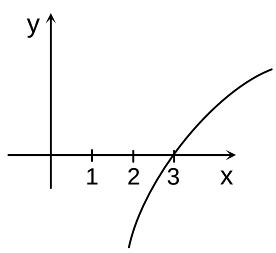
15. ¿Cuál de las siguientes figuras representa mejor al gráfico de la función $f(x) = \log_3 x + 1$?

A)


B)


C)


D)


E)


RESPUESTAS

Ejemplos / Págs.	1	2	3
1	C		
2	C	D	
3			C
4			A
5	D		
6		B	
7	D		
8	C		
9	E		
10	D	D	

CLAVES PÁG. 11

1. C	6. B	11. E
2. C	7. E	12. D
3. E	8. D	13. B
4. E	9. B	14. B
5. A	10. D	15. A

DSEMA22

Puedes complementar los contenidos de esta guía visitando nuestra web
http://clases.e-pedrodevaldivia.cl/