Material N° 28

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 22

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO Y FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una ecuación de **segundo grado** es una ecuación susceptible de llevar a la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, con **a**, **b** y **c** coeficientes reales y $\mathbf{a \neq 0}$.

EJEMPLOS

1. ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones es(son) de segundo grado?

I) $x^2 - \sqrt{5} = 0$
II) $(x + 1)^2 = 3 - x^2$
III) $(x + 1)^2 = (x - 1)^2$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II y III

2. Al escribir la ecuación $3(x - 2)^2 = (2 - x)^2 - 1$ en la forma $ax^2 + bx + 1 = 0$, ¿cuál es el valor de **a**?

A) 8
B) 2
C) 1
D) $\frac{5}{9}$
E) $\frac{2}{9}$

3. ¿Qué valores deben tener los coeficientes de la ecuación en **x**, $(a - 1)x^2 + (b + 3)x + c = 0$, para que sea de segundo grado?

A) $a \neq 1$, $b = 3$ y $c = 0$
B) $a = 1$, b y c cualquier real
C) $a \neq 1$, b y c cualquier real
D) $a \geq 1$, $b \neq 3$ y c cualquier real
E) a, b y c cualquier real

Una ecuación de segundo grado **siempre** tiene dos soluciones (o raíces). Estas soluciones (o raíces) se las designa por α y β, o bien, por $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$.
El cálculo de las soluciones (o raíces) de una ecuación de segundo grado, dada en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se realiza aplicando la siguiente fórmula:

$$\boxed{\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

OBSERVACIÓN: Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se factoriza, para determinar las soluciones, se aplica la propiedad siguiente:

$$\boxed{\mathbf{m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ó } n = 0}}$$

EJEMPLOS

1. ¿Cuáles son las soluciones (o raíces) de la ecuación $3x^2 - 2x - 5 = 0$?

A) $-\frac{10}{3}$ y 2
B) -5 y 3
C) -2 y $\frac{10}{3}$
D) $-\frac{5}{3}$ y 1
E) -1 y $\frac{5}{3}$

2. La ecuación $2(x^2 - 6) = -2x$ tiene como conjunto solución

A) $\{\sqrt{6}, 0\}$
B) $\{2, \sqrt{6}\}$
C) $\{3, -2\}$
D) $\{2, -3\}$
E) $\{-2, -3\}$

3. En la ecuación $(x - \sqrt{5})(x + 3) = 0$, el conjunto solución es

A) $\{\sqrt{5}, 3\}$
B) $\{\sqrt{5}, -3\}$
C) $\{-\sqrt{5}, 3\}$
D) $\{\sqrt{5} - 3, \sqrt{5} + 3\}$
E) $\left\{\frac{\sqrt{5} - 3}{2}, \frac{\sqrt{5} + 3}{2}\right\}$

Si α y β son las soluciones (o raíces) de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, entonces **siempre** se cumple que:

$$\boxed{\textbf{1)} \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{\textbf{2)} \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}}$$

y la ecuación se puede obtener aplicando la fórmula: $\boxed{x^2 - (\alpha + \beta)\,x + (\alpha \cdot \beta) = 0}$

EJEMPLOS

1. ¿Cuál es la suma de las soluciones (o raíces) de la ecuación $5x^2 + 10x + 1 = 0$?

   A) $-\frac{1}{5}$
   B) $\frac{1}{5}$
   C) -2
   D) 2
   E) $\frac{1}{2}$

2. ¿Cuál es el producto de las soluciones (o raíces) de la ecuación $5(x - 1)^2 = 4(1 - x)$?

   A) $-\frac{1}{5}$
   B) $\frac{6}{5}$
   C) $-\frac{3}{5}$
   D) $\frac{1}{5}$
   E) $\frac{3}{5}$

3. Una ecuación de segundo grado cuyas raíces, x_1 y x_2, satisfacen las igualdades $(x_1 + x_2) = -2$ y $x_1 \cdot x_2 = 5$ es

   A) $x^2 - 2x - 5 = 0$
   B) $x^2 - 2x + 5 = 0$
   C) $x^2 + 2x + 5 = 0$
   D) $x^2 + 2x - 5 = 0$
   E) $x^2 - 5x - 2 = 0$

PROBLEMAS DE PLANTEAMIENTO

Existen numerosas situaciones problemáticas que se resuelven mediante ecuaciones de segundo grado. Así por ejemplo, se tiene problemas de dígitos, problemas de edades, aplicaciones a la geometría y otros.

EJEMPLOS

1. La suma de dos números enteros es 3 y su producto es -10. Entonces, la diferencia positiva de dichos números es

   A) 3
   B) 4
   C) 5
   D) 6
   E) 7

2. Se tienen 14 m lineales de reja para cerrar el antejardín rectangular de una casa. El frontis de la casa es uno de los lados del jardín. ¿Cuál es la longitud de la reja que queda en el frente de la casa, si el área del jardín es 24 m^2?

   A) 3 m
   B) 4 m
   C) 6 m
   D) 12 m
   E) 24 m

3. En una lámina metálica rectangular se cortaron, en las 4 esquinas, cuadrados congruentes como lo indica la figura 1, quedando una superficie de 320 cm^2. ¿Cuál es la medida del lado de cada cuadrado?

   A) 2 cm
   B) 4 cm
   C) 5 cm
   D) 6 cm
   E) 8 cm

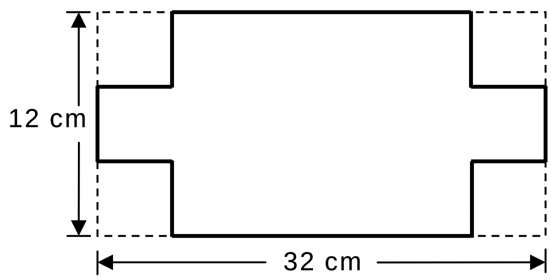
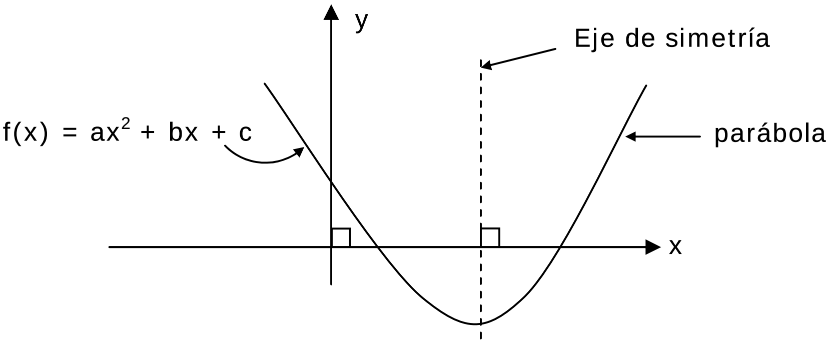


fig. 1

FUNCIÓN CUADRÁTICA

A la función de segundo grado **$f(x) = ax^2 + bx + c$**, siendo a, b, c $\in$ IR y $a \neq 0$ se le denomina **función cuadrática**.

La representación gráfica de una función cuadrática es una **parábola**, simétrica con respecto a una recta paralela al eje de las ordenadas. Dicha recta recibe el nombre de **eje de simetría**.

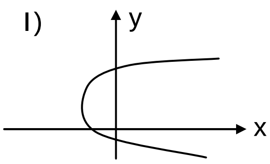


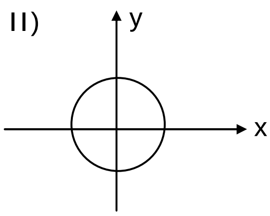
EJEMPLOS

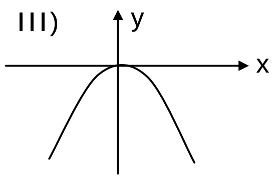
1. ¿Cuál de las siguientes opciones representa una función cuadrática?

A) $f(x) = x^2 + 5 - (x^2 + 2x)$
B) $f(t) = -3t + 2t^3$
C) $f(p) = \frac{1}{2}p + 4$
D) $f(a) = (a + 2)(a - 2) - a^2$
E) $f(m) = (-2m + 1)^2$

2. De las gráficas siguientes ¿cuál(es) de ellas pertenece(n) a una función cuadrática?

I) 

II) 

III) 

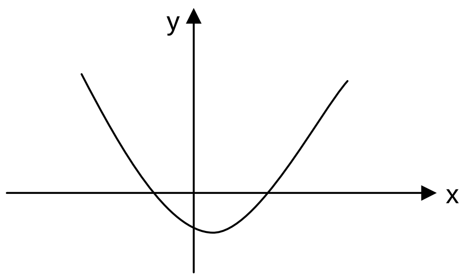
A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo II y III
D) Todas ellas
E) Ninguna de ellas

FUNCIONES DE LA FORMA $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

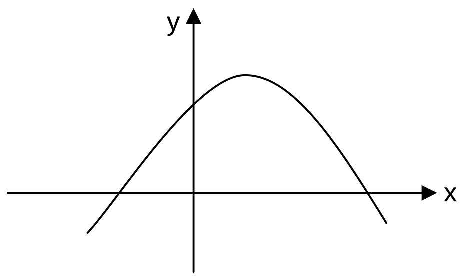
Observación: **c** es la ordenada del punto en donde la parábola intersecta al eje y.

Concavidad: Es la abertura que tiene la parábola.

Si $a > 0$, la concavidad de la parábola está orientada hacia arriba.

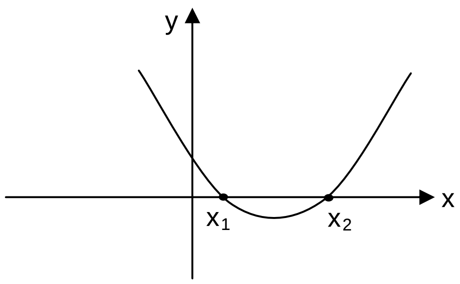


Si $a < 0$, la concavidad de la parábola está orientada hacia abajo.



CEROS DE LA FUNCIÓN

Los ceros (o raíces) de la función cuadrática son los valores x_1 y x_2 para los que $y = 0$.



EJEMPLO

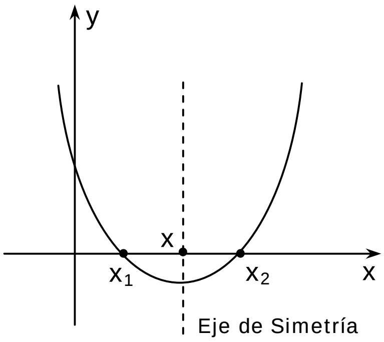
Con respecto a la función $f(x) = 3x^2 + 13x - 10$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) Su concavidad está orientada hacia arriba.
II) El punto de intersección con el eje y es (0, -10).
III) Un cero de la función es $x = -5$.

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) Todas ellas

EJE DE SIMETRÍA

El eje de simetría de una parábola es una recta que divide a esta curva en dos “ramas” congruentes.



Eje de simetría:

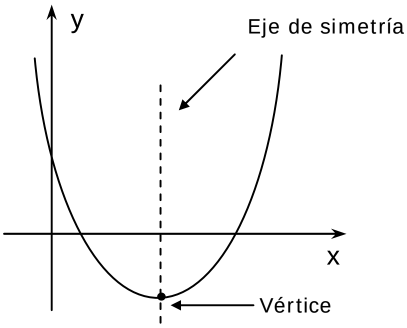
$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

o

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

VÉRTICE DE LA PARÁBOLA

El vértice de la parábola es el punto de intersección de ésta con su eje de simetría.



$$\boxed{V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)}$$

EJEMPLO

1. Dada la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s)?

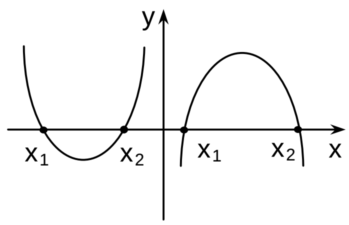
   I) $x = 1$ es un cero de la función.
   II) El eje de simetría es positivo.
   III) El vértice de la parábola está en el tercer cuadrante.

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo I y II
   D) Sólo I y III
   E) Todas ellas

DISCRIMINANTE

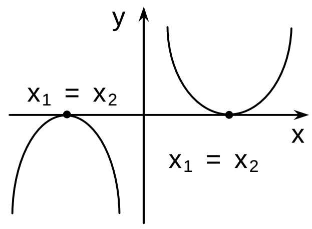
La expresión **b^2 - 4ac** se denomina **discriminante**, pues determina la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función $y = ax^2 + bx + c$

Si $\boxed{\mathbf{b^2 - 4ac > 0}}$



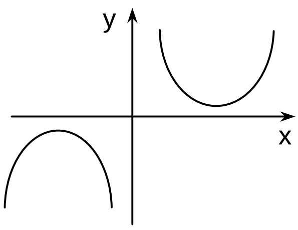
La parábola intersecta al eje x en dos puntos, por lo tanto tiene 2 soluciones (raíces reales distintas).

Si $\boxed{\mathbf{b^2 - 4ac = 0}}$



La parábola es tangente al eje x, por lo tanto tiene sus soluciones idénticas (una única solución real).

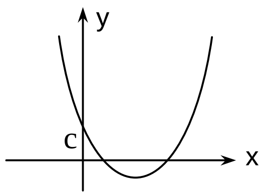
Si $\boxed{\mathbf{b^2 - 4ac < 0}}$



La parábola NO intersecta al eje x, no tiene solución real.

INTERSECCIÓN CON EL EJE Y

La parábola asociada a la función $y = ax^2 + bx + c$ siempre intersecta al eje de las ordenadas en y = c.



EJEMPLOS

1. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera con respecto del discriminante de la ecuación asociada a la función $y = x^2 + x – 6$?

   A) Es mayor o igual a cero
   B) Es menor que cero
   C) Sólo es igual a cero
   D) No es una potencia de cinco
   E) No es un cuadrado perfecto

2. La gráfica de la función f(x) = (-3x + 2) (1 – x) intersecta al **eje y** en

   A) $-\frac{2}{3}$
   B) 1
   C) -2
   D) -1
   E) 2

FUNCIONES DE LA FORMA $\boxed{y = ax^2}$

i) $y = x^2$ (fig. 1)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

2i) $y = \frac{1}{2}x^2$ (fig. 1)

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

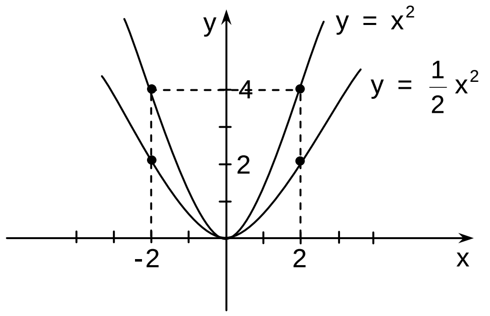


fig. 1

3i) $y = -x^2$ (fig. 2)

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

4i) $y = -\frac{1}{2}x^2$ (fig. 2)

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

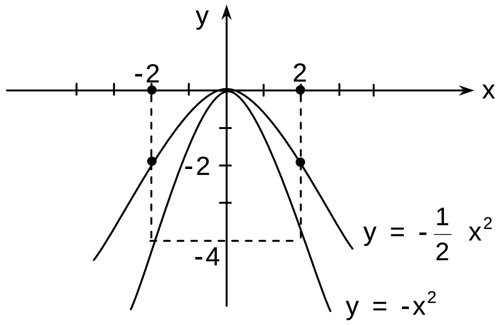


fig. 2

OBSERVACIONES:
- Si $|a| > 1$, la gráfica de $y = ax^2$ es más "angosta" que la gráfica de $y = x^2$.
- Si $0 < |a| < 1$, la gráfica de $y = ax^2$ es más "ancha" que la gráfica de $y = x^2$.
- Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba (sentido positivo del eje y).
- Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo (sentido negativo del eje y).

EJEMPLO

En la figura 3, se muestran tres gráficas de funciones cuadráticas. ¿Cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s)?

I) $a > b$
II) $|a| = |c|$
III) $|b| > |c|$

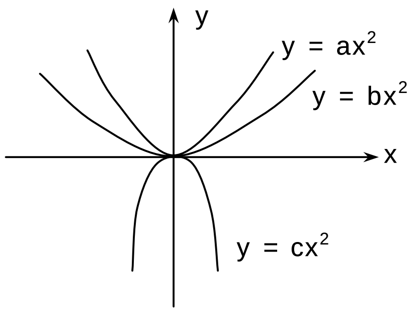


fig. 3

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Todas ellas
E) Ninguna de ellas

FUNCIONES DE LA FORMA

$$\boxed{y = ax^2 + c}$$

La figura 1, muestra las gráficas de $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 3$.

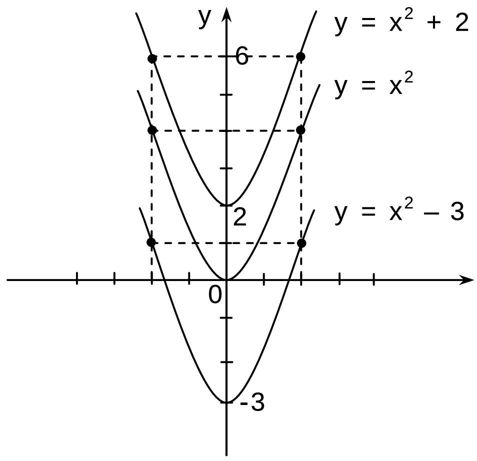


fig. 1

OBSERVACIONES

- Si la curva corta al eje y, entonces x se hace 0 , resultando y = c.
- Si $c > 0$, la parábola se desplaza c unidades hacia arriba con respecto al origen.
- Si $c < 0$, la parábola se desplaza c unidades hacia abajo con respecto al origen.

EJEMPLOS

1. ¿Cuál es la función cuadrática cuya representación gráfica es la parábola de la figura 2?

   A) $y = 2x^2 - 2$
   B) $y = -x^2 - 4$
   C) $y = x^2 + 2$
   D) $y = -x^2 - 2$
   E) $y = -x^2 + 2$

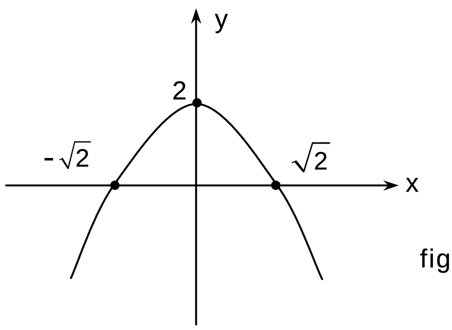


fig. 2

2. Al desplazar la parábola asociada a la función $y = x^2 + 2$, cinco unidades hacia abajo se obtiene la función

   A) $y = x^2 - 5$
   B) $y = -x^2 + 5$
   C) $y = x^2 - 3$
   D) $y = x^2 + 3$
   E) Ninguna de las anteriores

EJERCICIOS

1. ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones es(son) de segundo grado?

I) $x^2 + x = 3 + 2x$
II) $5x - x^2 = 4x + 7 - x^2$
III) $2x^2 = 3$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

2. ¿Qué valor debe tener **k** en la ecuación $3x^2 - 5kx - 2 = 0$, para que una de sus raíces sea -2?

A) 0
B) 1
C) -1
D) -20
E) -4

3. De la ecuación $x^2 - 11x + 28 = 0$, se puede deducir que

A) las soluciones se diferencian en 4 unidades
B) las soluciones son números impares consecutivos
C) la razón entre las soluciones es 2 : 3
D) el producto de las soluciones es -28
E) la diferencia positiva entre las soluciones es tres

4. Una ecuación de segundo grado cuyas raíces son $\alpha = 2 + \sqrt{5}$ y $\beta = 2 - \sqrt{5}$, es

A) $x^2 - 4x - 1 = 0$
B) $x^2 - 4x + 1 = 0$
C) $x^2 - 5x + 1 = 0$
D) $x^2 - 5x - 1 = 0$
E) Ninguna de las anteriores

5. El mayor de los lados de un rectángulo es 7 metros más largo que el lado de un cuadrado, y el lado menor es 7 metros más corto que el lado del mismo cuadrado. Si la suma de las áreas del rectángulo y del cuadrado es 113 m^2, entonces el lado del cuadrado mide

A) 1 m
B) 2 m
C) 7 m
D) 8 m
E) 9 m

6. El gráfico de la figura 1, podría corresponder a la función cuadrática

A) $f(x) = x^2 + 2x$
B) $f(x) = 3 + 2x - x^2$
C) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
D) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
E) $f(x) = x^2 - 2x$

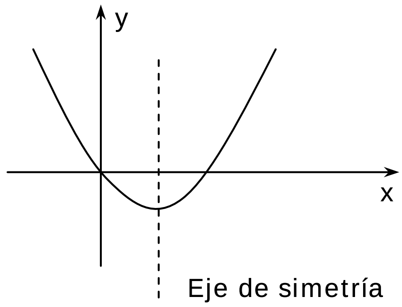


fig. 1

7. Respecto a la parábola $f(x) = x^2 - 9x + 14$, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

I) Sus ceros son $x_1 = 7$ y $x_2 = 2$.
II) Intersecta al eje y en (0, 14).
III) Su eje de simetría es $x = 4$.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

8. En el gráfico $f(x) = x^2 - 8x + 15$ (fig. 2), las coordenadas del vértice **P** son

A) (1, -4)
B) (3, -5)
C) (4, -1)
D) (15, -4)
E) (15, -8)

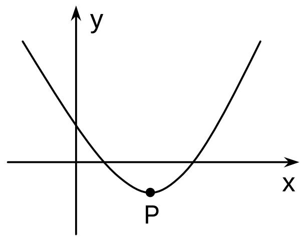


fig. 2

9. Si los puntos de intersección de la parábola $f(x) = x^2 + bx + c$ con el eje de las abscisas son $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$, entonces las coordenadas del vértice son

A) $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$
B) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$
C) $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$
D) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$
E) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

10. Con respecto a la función $f(x) = x^2 + 6x + 9$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) Es tangente al eje x.
II) No corta al eje y.
III) Sus ramas se extienden hacia abajo.

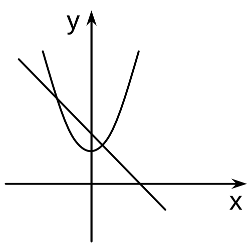
A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) Ninguna de ellas

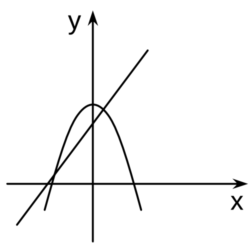
11. Respecto a la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + c$, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

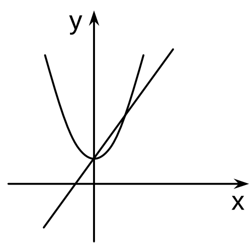
I) Si $c > 1$, no corta al eje x.
II) Si $c \neq 1$, siempre corta al eje x.
III) Si $c > 0$, siempre corta al eje x.

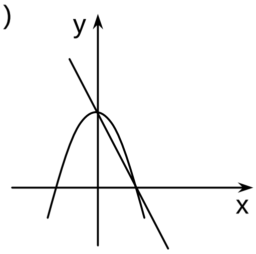
A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) Ninguna de ellas

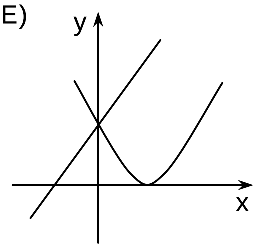
12. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 1$?

A)


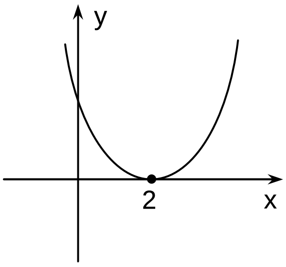
B)


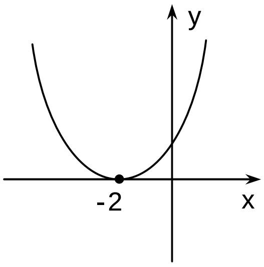
C)


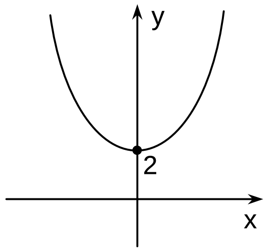
D)


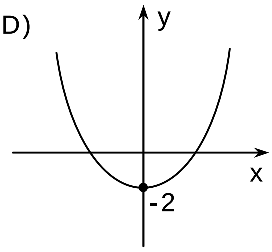
E)


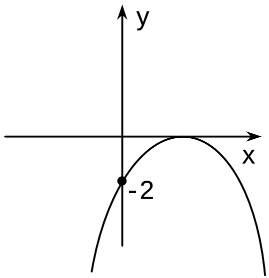
13. ¿Cuál de las gráficas siguientes representa a la función cuadrática $y = 3(x - 2)^2$?

A)


B)


C)


D)


E)


14. Con respecto al gráfico de la figura 3, que corresponde a la función cuadrática $h(t) = 8t - t^2$ (h = altura en metros, t = tiempo en segundos, $0 \leq t \leq 8$), ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s)?

I) Los ceros de la función son $t_1 = 0$ y $t_2 = 8$.
II) A 3 segundos corresponde una altura de 12 metros.
III) La altura máxima se obtiene a los 4 segundos.

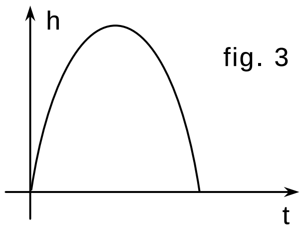


fig. 3

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

15. Dadas las funciones cuadráticas de la gráfica (fig. 4), se puede afirmar que:

I) La función 1 es de la forma $y = ax^2 + b$, con $a > 0$ y $b > 0$.

II) La función 2 es de la forma $y = ax^2$, con $a > 0$.

III) La función 3 es de la forma $y = (x - b)^2$, $b \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$

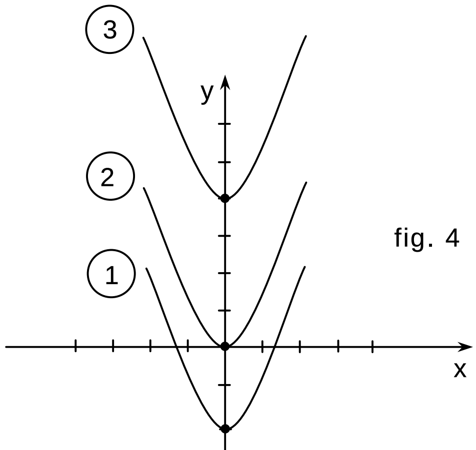


fig. 4

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

16. Con respecto al gráfico de la figura 5, ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s)?

I) El vértice de la parábola es (0,-12).
II) $f(x) = x^2 - x - 12$.
III) El eje de las ordenadas es el eje de simetría de la parábola.

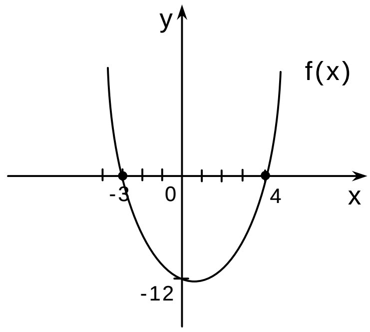


fig. 5

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

17. Un jugador de Golf intenta alcanzar el green con un lanzamiento en que la pelota describe una trayectoria parabólica. La altura que alcanza está dada por la función cuadrática $h(t) = -5t^2 + 50t$, donde h es la altura, en metros, alcanzada por la pelota y t es el tiempo, en segundos, desde que es lanzada. ¿Qué altura alcanza la pelota a los 5 segundos de ser lanzada?

A) 50 metros
B) 75 metros
C) 100 metros
D) 125 metros
E) 275 metros

18. La trayectoria de un proyectil está dada por la ecuación $y(t) = 100t - 5t^2$, donde t se mide en segundos y la altura y(t) se mide en metros. Entonces, ¿en cuál(es) de los siguientes valores de t estará el proyectil a 420 m de altura sobre el nivel del suelo?

I) 6 segundos.
II) 10 segundos.
III) 14 segundos.

A) Sólo en I
B) Sólo en II
C) Sólo en III
D) Sólo en I y en II
E) Sólo en I y en III

19. En el computador se necesita reproducir una fotografía rectangular cuyo largo es 10 cm mayor que el ancho. ¿Cuáles son las medidas del largo y del ancho?

(1) El área de la fotografía es 600 cm^2.

(2) El perímetro de la fotografía es 100 cm.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

20. En el rectángulo ABCD de la figura 6, la región achurada corresponde a una franja de ancho constante igual a 3 m. Se puede calcular el perímetro del rectángulo ABCD, si:

(1) Se conoce el área del rectángulo ABCD.

(2) Se conoce el área de la región achurada.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

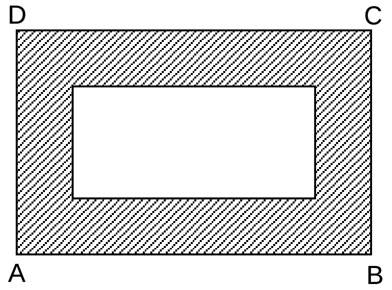


fig. 6

RESPUESTAS

Ejemplos / Págs.	1	2	3
1	D	E	C
2	E	D	B
3	C	D	C
4	E	C	B
5	E	B	
6	E		
7	D		
8	A	E	
9	A		
10	E	C	

CLAVES PÁG. 11

1. D	6. E	11. A	16. B
2. C	7. C	12. C	17. D
3. E	8. C	13. A	18. E
4. A	9. D	14. D	19. D
5. E	10. A	15. B	20. B

DSEMA28