PREUNIVERSITARIO PEDRO DE VALDIVIA

CURSO: MATEMÁTICA

MATERIAL N° 070

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 30

UNIDAD: GEOMETRÍA

TRIGONOMETRÍA

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En el triángulo ABC, rectángulo en C (figura 1), se definen las siguientes razones:

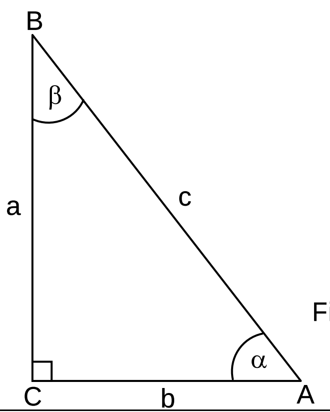


Fig. 1

Seno de α = **(sen α)**	=	$\dfrac{\text{Cateto opueto a } \boldsymbol{\alpha}}{\text{hipotenusa}}$	= $\dfrac{a}{c}$
Coseno de α = **(cos α)**	=	$\dfrac{\text{Cateto adyacente a } \boldsymbol{\alpha}}{\text{hipotenusa}}$	= $\dfrac{b}{c}$
Tangente de α = **(tg α)**	=	$\dfrac{\text{Cateto opuesto a } \boldsymbol{\alpha}}{\text{Cateto adyacente a } \boldsymbol{\alpha}}$	= $\dfrac{a}{b}$
Cotangente de α = **(cotg α)**	=	$\dfrac{\text{Cateto adyacente a } \boldsymbol{\alpha}}{\text{Cateto opuesto a } \boldsymbol{\alpha}}$	= $\dfrac{b}{a}$
Secante de α = **(sec α)**	=	$\dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a } \boldsymbol{\alpha}}$	= $\dfrac{c}{b}$
Cosecante de α = **(cosec α)**	=	$\dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto a } \boldsymbol{\alpha}}$	= $\dfrac{c}{a}$

De acuerdo al triángulo ABC de la figura 2, completa el cuadro

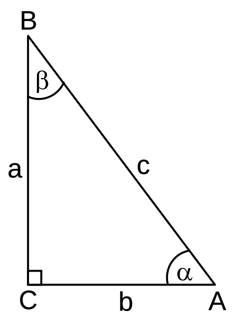


Fig. 2

sen β = ______	cosec β = ______
cos β = ______	sec β = ______
tg β = ______	cotg β = ______

EJEMPLOS

1. Si $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, entonces $\operatorname{cosec} \alpha =$

   A) $\frac{17}{8}$

   B) $\frac{17}{15}$

   C) $\frac{15}{8}$

   D) $\frac{15}{17}$

   E) $\frac{8}{15}$

2. La base de un triángulo isósceles tiene una longitud de 12 cm y el coseno del ángulo adyacente a ella es $\frac{3}{5}$. Luego, el perímetro del triángulo es

   A) 16 cm
   B) 24 cm
   C) 32 cm
   D) 48 cm
   E) 64 cm

3. En la figura 3, $\cos \alpha = 0{,}15$ y $b = 1{,}5$ cm. Entonces, ¿cuál es la medida de la hipotenusa?

   A) 100 cm
   B) 15 cm
   C) 12,5 cm
   D) 10 cm
   E) 1 cm

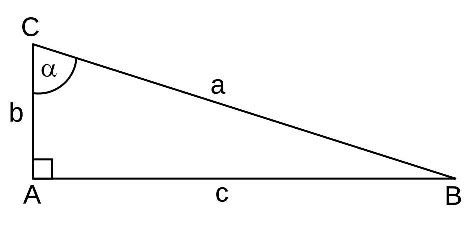


Fig. 3

4. En la circunferencia de centro O y radio r de la figura 4, el ángulo del centro que subtiende la cuerda c es 2α. Entonces, c =

   A) $r \cdot \text{sen } \alpha$
   B) $r \cdot \cos \alpha$
   C) $r \cdot \text{sen } 2\alpha$
   D) $2 \cdot r \cdot \cos \alpha$
   E) $2 \cdot r \cdot \text{sen } \alpha$

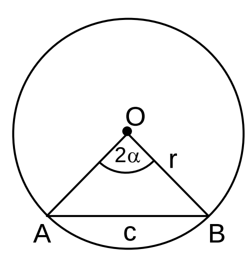


Fig. 4

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS DE 30º, 45º y 60º

Considerando los triángulos de las figuras 1 y 2, se tiene que:

Fig. 1

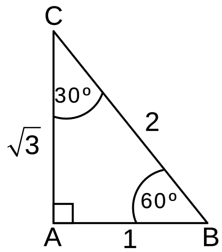
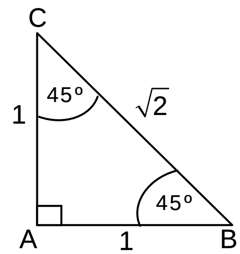
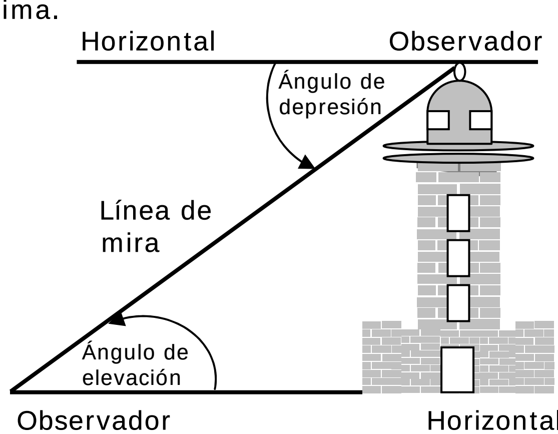


Fig. 2



Razón \ Ángulo	30º	45º	60º
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
sec α	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2
cosec α	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Ángulos de **elevación** y de **depresión** son aquellos formados por la horizontal, considerada a nivel del ojo del observador y la línea de mira, según que el objeto observado esté por sobre o bajo esta última.



Con respecto a un observador, los ángulos de elevación y de depresión constituyen ángulos alternos internos entre paralelas, por lo tanto, sus medidas son iguales.

EJEMPLOS

1. $\text{tag } 60º \cdot \text{cotg } 30º - \sec^2 45º =$

   A) 1
   B) $3 - \sqrt{2}$
   C) $2\sqrt{3} - 2$
   D) $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$
   E) 5

2. ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por un edificio de 50 m de altura (fig. 3) cuando el sol se ha elevado 30º sobre el horizonte?

   A) $150\sqrt{3}$ m
   B) 150 m
   C) $50\sqrt{3}$ m
   D) 50 m
   E) $25\sqrt{3}$ m

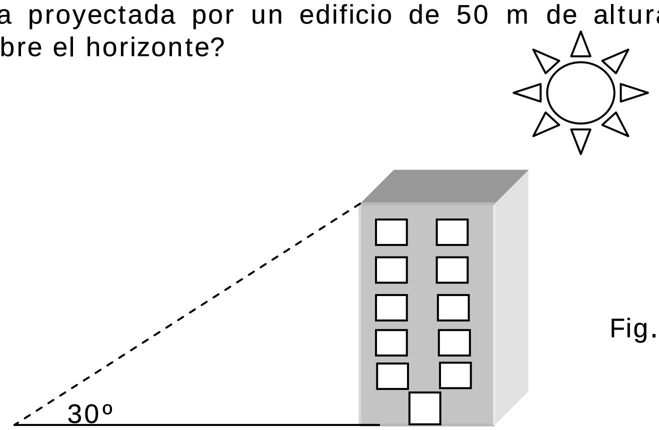


Fig. 3

3. La longitud del hilo que sujeta un volantín (fig. 4) es de 40 m y el ángulo de elevación es de 30º. ¿Qué altura alcanza el cometa?

   A) 81,5 m
   B) 80 m
   C) 21,5 m
   D) 20 m
   E) 18,5 m

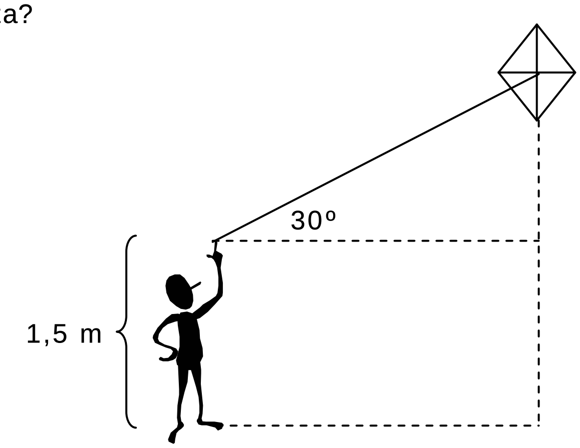


Fig. 4

4. Un observador de 1,80 m de estatura observa la azotea de un edificio, según un ángulo de elevación de 60º. Si el observador está a 12 m del edificio, ¿cuánto mide la altura del edificio?

   A) 24 m
   B) $12\sqrt{3}$ m
   C) $8\sqrt{3}$ m
   D) $(4\sqrt{3} + 1,8)$ m
   E) $(12\sqrt{3} + 1,8)$ m

3. RAZONES DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Si en el triángulo ABC, rectángulo en C (figura 1), se aplican las definiciones de las razones trigonométricas a los ángulos α y β, se deducen las siguientes igualdades:

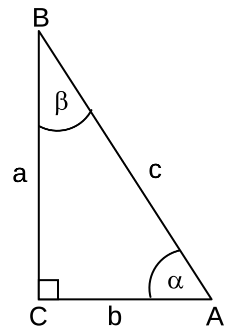


Fig. 1

sen α	= cos β	= cos (90° - α)
cos α	= sen β	= sen (90° - α)
tg α	= cotg β	= cotg (90° - α)
cotg α	= tg β	= tg (90° - α)
sec α	= cosec β	= cosec (90° - α)
cosec α	= sec β	= sec (90° - α)

EJEMPLOS

1. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es(son) iguales a sen 40° + cos 50°?

   I) 2 sen 40°
   II) 2 cos 50°
   III) sen 50º + cos 40°

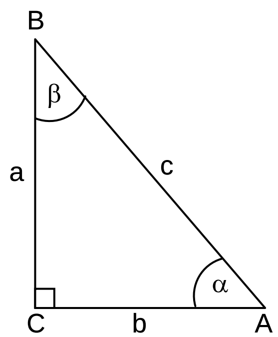
   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo III
   D) Sólo I y II
   E) I, II y III

2. Si sec 54° = $\frac{4}{\sqrt{5}+1}$, entonces cosec 36° =

   A) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$
   B) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
   C) $\frac{2\sqrt{5}-2}{3}$
   D) $\sqrt{5}$ + 1
   E) $\sqrt{5}$ - 1

4. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Las identidades 1, 2, 3, 4 y 5 se deducen directamente de las definiciones de las razones trigonométricas. Las identidades 6, 7 y 8 se deducen combinando las definiciones con el Teorema de Pitágoras.



1. $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$	5. $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$
2. $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$	6. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
3. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1$	7. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$
4. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$	8. $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$

EJEMPLOS

1. Si $k = \cos^2 60° + \operatorname{sen}^2 40° + \operatorname{sen}^2 50°$, entonces $4k$ es igual a

   A) 7
   B) 6
   C) 5
   D) 1,25
   E) 1

2. Si α es un ángulo agudo, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es(son) identidad(es)?

   I) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = \sec\alpha$
   II) $\dfrac{1}{1-\cos^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$
   III) $(\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha)(\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha) = 1$

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo III
   D) Sólo I y II
   E) I, II y III

EJERCICIOS

1. Si $\text{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}$ y α es un ángulo agudo, entonces $\cos\alpha$ =

A) $\frac{12}{13}$
B) $\frac{12}{5}$
C) $\frac{5}{12}$
D) $\frac{5}{13}$
E) $\frac{13}{12}$

2. El triángulo de la figura 1, es rectángulo en C. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es(son) verdadera(s)?

I) $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$

II) $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

III) $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

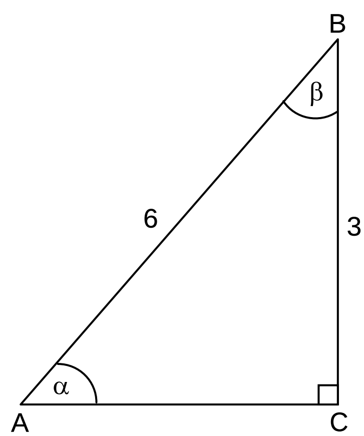


Fig. 1

3. El extremo superior de una escalera de 8 metros de largo se encuentra apoyada en una pared. El ángulo formado por el piso y la escalera es de 60°. Luego, la distancia entre la pared y el pie de la escalera es

A) $4\sqrt{3}$ m
B) $4\sqrt{2}$ m
C) $2\sqrt{2}$ m
D) 6 m
E) 4 m

4. Un alpinista que baja por una ladera, por cada 20 metros que recorre baja 10 metros. Entonces, el ángulo de inclinación de la ladera es

A) 15°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) 75°

5. En la figura 2, sen $\alpha = \frac{4}{5}$ y tg $\beta = \frac{3}{5}$, entonces **x** mide

A) 3 cm
B) 5 cm
C) 9 cm
D) 12 cm
E) 15 cm

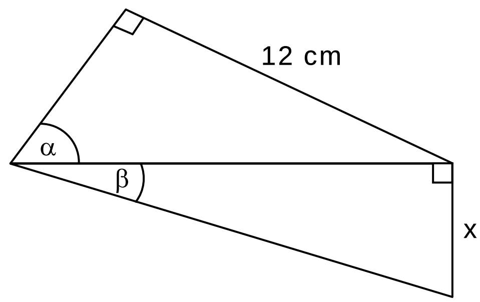


Fig. 2

6. Si $A = \text{sen}^2 30° + \text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 70°$, entonces A =

A) $\frac{7}{4}$
B) $\frac{6}{4}$
C) $\frac{5}{4}$
D) $\frac{3}{4}$
E) $\frac{1}{4}$

7. Si tg 15° = $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, entonces cotg 75° =

A) $\frac{5}{2+\sqrt{3}}$
B) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$
C) $2 + \sqrt{3}$
D) $\sqrt{3} - 2$
E) $2 - \sqrt{3}$

8. En la circunferencia de centro O y radio r de la figura 3, la longitud de la cuerda $\overline{AB}$ está dada por

A) $2 \cdot r \cdot \text{sen } 20°$
B) $2 \cdot r \cdot \cos 20°$
C) $2 \cdot r \cdot \text{sen } 70°$
D) $r \cdot \text{sen } 40°$
E) $r \cdot \cos 70°$

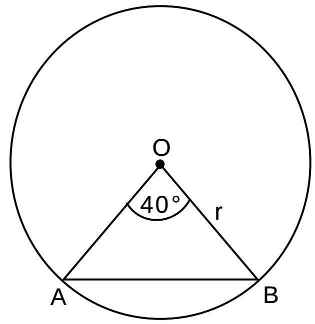


Fig. 3

9. En el triángulo ABC isósceles de base $\overline{AB}$ de la figura 4, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) la medida del lado $\overline{AC}$?

I) $\dfrac{1{,}8}{\cos 50°}$

II) $\dfrac{1{,}8}{\text{sen } 40°}$

III) $3{,}6 \cdot \cos 50°$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II y III

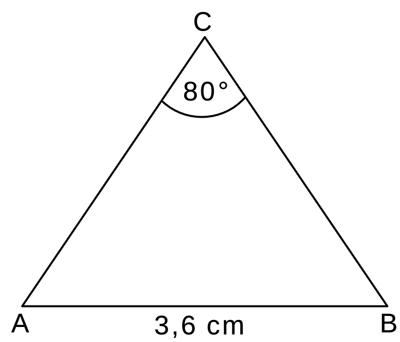


Fig. 4

10. Si β es un ángulo agudo de un ΔABC, rectángulo en C, $m = a \cdot \text{sen } \beta$ y $n = a \cdot \cos \beta$, entonces $m^2 + n^2 =$

A) a^2
B) a
C) 1
D) 0
E) -1

11. Si α es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es(son) identidades?

I) $(\text{sen } \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \dfrac{2}{\sec \alpha \cdot \text{cosec } \alpha}$

II) $\text{tg}^2\, \alpha = \sec^2 \alpha - 1$

III) $\text{tg } \alpha + \text{cotg } \alpha = \sec \alpha \cdot \text{cosec } \alpha$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

12. Desde un avión que vuela a 2.000 m de altura se observa el inicio de la pista de aterrizaje 30° por debajo de la línea horizontal de vuelo (ángulo de depresión) (fig. 5). ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) la distancia desde el avión al inicio de la pista?

I) $\dfrac{2.000}{\text{sen } 30^\circ}$ metros.

II) $\dfrac{2.000}{\cos 60^\circ}$ metros.

III) $2.000 \cdot \text{tg } 30^\circ$ metros.

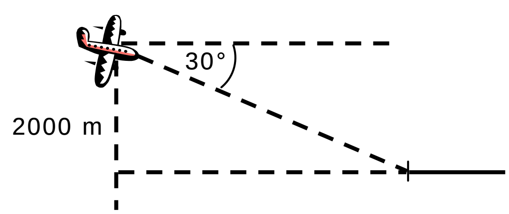


Fig. 5

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo I y III

13. La circunferencia de centro en el origen del sistema de coordenadas, (figura 6), tiene radio 6 cm. ¿Cuáles son las coordenadas del punto A?

A) $(3, \ 3\sqrt{3})$
B) $(\sqrt{3}, \ 3)$
C) $(3, \ \sqrt{3})$
D) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$
E) $(3\sqrt{3}, \ 3)$

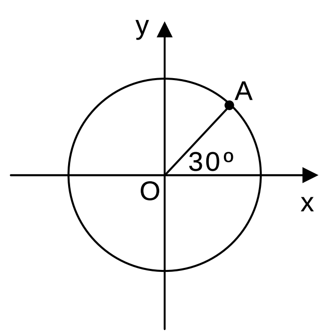


Fig. 6

14. El volantín de Luchín está sujeto por un hilo tenso de 160 m de longitud y el ángulo de elevación es de 40°. ¿A qué altura está el volantín, sin tomar en cuenta la estatura de Luchín?

A) $160 \cdot \text{sen } 40°$ m
B) $160 \cdot \text{sen } 50°$ m
C) $160 \cdot \cos 40°$ m
D) $160 \cdot \sec 40°$ m
E) $160 \cdot \sec 50°$ m

15. Un camión al chocar con un poste lo quiebra y la punta del poste toca el suelo a una distancia de 3 m de la base del poste. Si la parte superior del poste quebrado forma con el suelo un ángulo de 45°, ¿cuál era la altura original del poste?

A) $(6 + 3\sqrt{2})$ m
B) 6 m
C) $(3 + 3\sqrt{2})$ m
D) $6\sqrt{2}$ m
E) $(3 + 1{,}5\sqrt{2})$ m

16. La figura 7, muestra un corte transversal del túnel del metro. El piso de éste tiene 4 m de ancho y el ángulo de elevación desde el extremo A de la base al punto C de mayor altura del túnel es de 60°. ¿Cuál es la medida de $\overline{DC}$?

A) 2 m
B) $2\sqrt{3}$ m
C) 3 m
D) 4 m
E) $4\sqrt{3}$ m

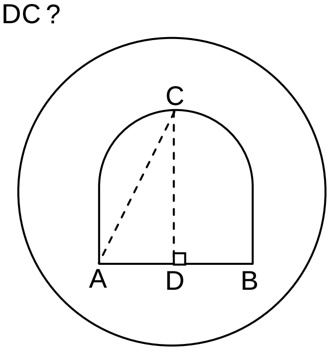


Fig. 7

17. En la circunferencia de centro O de la figura 8, está inscrito el triángulo ABC. Si $\text{sen } \alpha = 0{,}6$ y el área del triángulo es 96 cm^2, entonces ¿cuál es el área del círculo?

A) $400\ \pi\ cm^2$
B) $100\pi\ cm^2$
C) $40\pi\ cm^2$
D) $25\pi\ cm^2$
E) $20\pi\ cm^2$

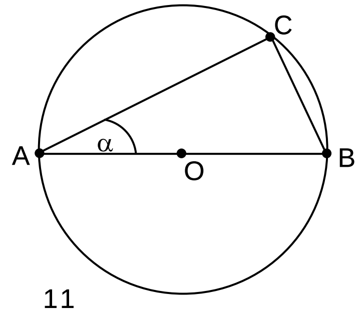


Fig. 8

18. La circunferencia de centro O y radio r (fig. 9), está inscrita en un triángulo equilátero de lado **a**. Entonces, **r** mide

A) $\frac{2a}{3}\sqrt{3}$

B) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$

C) $\frac{3a}{2}\sqrt{3}$

D) $\frac{a}{6}\sqrt{3}$

E) $\frac{a}{3}\sqrt{3}$

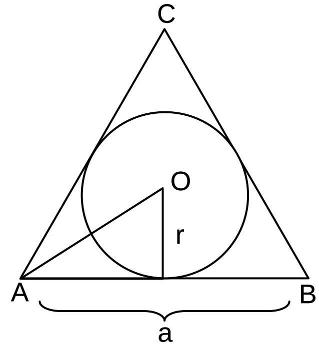


Fig. 9

19. Se puede determinar el perímetro del triángulo ABC de la figura 10, si:

(1) $\text{tg}\ \alpha = \frac{4}{3}$

(2) $\overline{AB} = 5$ cm

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

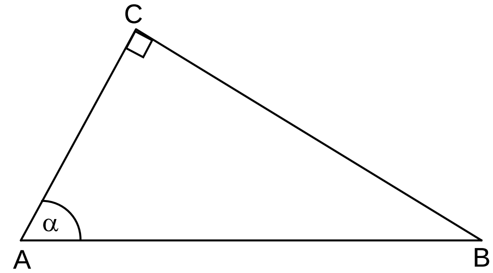


Fig. 10

20. En un triángulo MNT isósceles de base $\overline{MN}$, la altura correspondiente a la base mide 1,8 metros. ¿Cuál es el área del triángulo?

(1) El triángulo es obtusángulo.

(2) La tangente correspondiente a uno de los ángulos de la base es $0,\overline{6}$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3	4
1	$\frac{b}{c}$ $\frac{c}{b}$ $\frac{a}{c}$ $\frac{c}{a}$ $\frac{b}{a}$ $\frac{a}{b}$			
2	B	C	D	E
4	A	C	C	E
5	D	E		
6	C	E		

CLAVES PÁG. 7

1. A	6. C	11. E	16. B
2. D	7. E	12. D	17. B
3. E	8. A	13. E	18. D
4. B	9. D	14. A	19. C
5. C	10. A	15. C	20. B

DCIMA070