

UNIDAD: NÚMEROS Y PROPORCIONALIDAD
RAZONES Y PROPORCIONES

RAZÓN es el cociente entre dos cantidades. Se escribe $\frac{a}{b}$ o $a : b$.

Y se lee "a es a b"; **a** se denomina antecedente; **b** se denomina consecuente.

EJEMPLOS

1. Para un terreno de 0,6 km de largo y 200 m de ancho, la razón entre largo y ancho es

- A) 3 : 1.000
- B) 3 : 1
- C) 3 : 100
- D) 1 : 3
- E) 0,6 : 2

2. Los puntos M, N, P y Q, son puntos medios del cuadrado ABCD (fig. 1). Entonces, ¿en qué razón están las áreas de las regiones achuradas y en blanco respectivamente?

- A) $\frac{8}{3}$
- B) $\frac{5}{8}$
- C) $\frac{3}{8}$
- D) $\frac{5}{3}$
- E) $\frac{3}{5}$

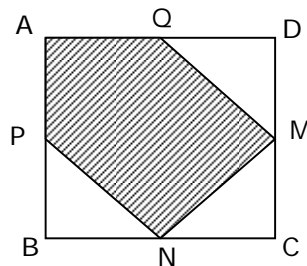


Fig. 1

PROPORCIÓN es la igualdad de dos razones. Se escribe $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ ó $x : a = y : b$

Y se lee “**x** es a **a** como **y** es a **b**”; **x** y **b** se denominan extremos; **a** e **y** se denominan medios.

TEOREMA FUNDAMENTAL

En toda proporción, el producto de los **extremos** es igual al producto de los **medios**.

$$(x : a = y : b) \Leftrightarrow (x \cdot b = y \cdot a)$$

OBSERVACIÓN: Si $x : a = y : b$, entonces existe una constante **k**, denominada constante de proporcionalidad, tal que:

$$x = ka, \quad y = kb; \quad k \neq 0$$

EJEMPLOS

1. Si $u : v = 3 : 10$ y $u : w = 1 : 2$, entonces ¿cuál de las siguientes alternativas es **FALSA**, sabiendo que $v = 30$?

- A) $u^2 = 81$
- B) $w - v = -12$
- C) $\frac{w}{2} = 9$
- D) $2w = 36$
- E) $u - v = 21$

2. El valor de x en la proporción $\frac{x-2}{3} = \frac{x+1}{4}$ es

- A) -1
- B) -3
- C) -5
- D) 3
- E) 11

SERIE DE RAZONES es la igualdad de más de dos razones.

La serie de razones $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ también se escribe como $x : y : z = a : b : c$

OBSERVACIONES :

$$\textcircled{2} \quad \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Si } \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{y}{z} = \frac{b}{c}, \quad \text{entonces } x : y : z = a : b : c$$

EJEMPLOS

- Si $a : b = 3 : 5$ y $b : c = 5 : 9$, entonces $a : c : b =$
 - $3 : 9 : 10$
 - $3 : 5 : 9$
 - $5 : 9 : 3$
 - $3 : 9 : 5$
 - $6 : 18 : 5$
- Las edades de tres hermanas: María, Carmen y Lucía, son entre sí como $2 : 5 : 3$. Si sus edades suman 30 años, entonces la edad de Lucía es
 - 15 años
 - 9 años
 - 6 años
 - 3 años
 - 1 año
- Si $\frac{r}{s} = \frac{3}{5}$ y $\frac{r}{t} = \frac{9}{10}$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?
 - $r : t = 3 : 10$
 - $\frac{3}{2}t = s$
 - $2r : s : 3t = 6 : 5 : 10$
 - Sólo II
 - Sólo III
 - Sólo II y III
 - I, II y III
 - Ninguna de ellas

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dos variables, x e y , son **directamente proporcionales** si el **cuociente** entre sus valores correspondientes es constante.

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$$

Así por ejemplo, en la tabla de la figura 1, las cantidades ubicadas en las filas A y B son directamente proporcionales.

A	3	4	5	x
B	9	12	15	y

Fig. 1

Por lo tanto se deduce que $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$

OBSERVACIONES :

- ② En una proporción directa, si una cantidad aumenta (disminuye) n veces, la otra aumenta (disminuye) el mismo número de veces.
- ② El gráfico de una proporcionalidad directa corresponde a una **línea recta** que **pasa por el origen** (fig. 2).

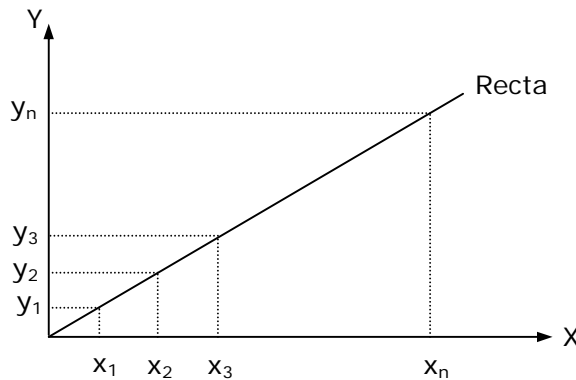


Fig. 2

EJEMPLOS

1. A y B son magnitudes directamente proporcionales. Respecto a la siguiente tabla

A	5	x	15
B	30	42	y

los valores de x e y son respectivamente

- A) 7 y 90
- B) 7 y 60
- C) 6 y 72
- D) 8 y 90
- E) 9 y 54

2. Si $2x$ varía directamente con \sqrt{y} e $y = 4$ cuando $x = 3$, entonces ¿cuál es el valor de $2x$ cuando $y = 16$?

- A) $\frac{1}{12}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) 32
- D) 24
- E) 12

3. Según el gráfico de la figura 3, x e y son magnitudes directamente proporcionales. Entonces, ¿cuál es el valor de a ?

- A) $\frac{1}{3}$
- B) 3
- C) 6
- D) 9
- E) 12

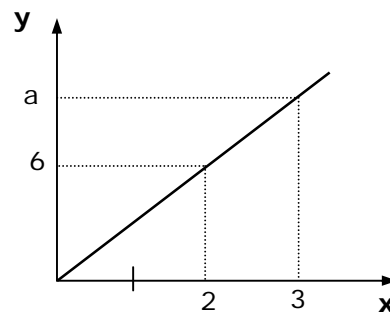


Fig. 3

4. Dos obreros, A y B, reciben como pago por un trabajo \$ 275.000. ¿Cuánto le toca a cada uno si A trabajó 2 días y B trabajó 3 días?

- | | A | B |
|----|---------------------------|------------|
| A) | \$ 137.500 | \$ 137.500 |
| B) | \$ 91.666 | \$ 183.334 |
| C) | \$ 55.000 | \$ 220.000 |
| D) | \$ 110.000 | \$ 165.000 |
| E) | Ninguna de las anteriores | |

PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dos variables, **x** e **y**, son **inversamente proporcionales** si el **producto** entre sus valores correspondientes es constante

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \dots\dots\dots = x_n \cdot y_n = k \quad k : \text{constante}$$

Así por ejemplo, en la tabla de la figura 1, las cantidades ubicadas en las filas **A** y **B** son inversamente proporcionales

A	2	3	5	x
B	15	10	6	y

Fig. 1

Por lo tanto se deduce que $x \cdot y = 30$

OBSERVACIONES :

- ⊗ En una proporcionalidad inversa, si una cantidad aumenta (o disminuye) n veces, la otra disminuye (o aumenta) el mismo número de veces.
- ⊗ El gráfico de una proporcionalidad inversa corresponde a una hipérbola equilátera (fig. 2).

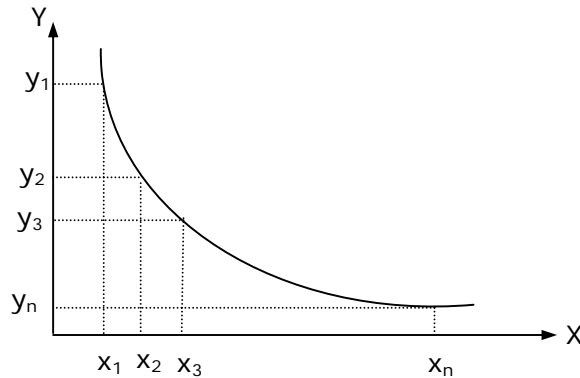


Fig. 2

EJEMPLOS

1. Las cantidades ubicadas en las columnas **A** y **B**, en la tabla de la figura 3, son inversamente proporcionales. ¿Cuál es el valor de $M + N$?

A	B
6	3
4	M
N	18

Fig. 3

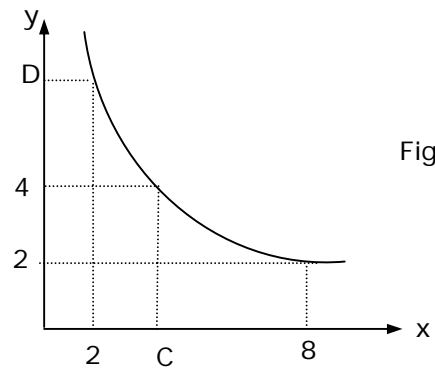
- A) 38
- B) 36
- C) 5,5
- D) 5
- E) 4,5

2. Las variables x e y son inversamente proporcionales. Cuando x vale 60, y vale 90. ¿Cuánto vale x , cuando y vale 120?

- A) 30
- B) 40
- C) 45
- D) 60
- E) 90

3. De acuerdo a la información entregada en el gráfico de la figura 4, el cual representa una hipérbola, ¿cuál es el valor de $C - D$?

- A) -8
- B) -4
- C) 4
- D) 8
- E) Ninguna de las anteriores



4. 8 empleados hacen un trabajo en 20 días. Para hacer el mismo trabajo en 5 días, ¿cuántos empleados más se necesitarían?

- A) 2
- B) 12
- C) 16
- D) 24
- E) 32

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Sea **A** una variable directamente proporcional a la variable **B** y al mismo tiempo inversamente proporcional a la variable **C**, entonces se cumple que para sus valores correspondientes:

$$\frac{A_1 \cdot C_1}{B_1} = \frac{A_2 \cdot C_2}{B_2} = \frac{A_3 \cdot C_3}{B_3} = \dots\dots\dots = \frac{A_n \cdot C_n}{B_n} = k \quad k : \text{constante}$$

EJEMPLOS

1. En un taller de costura, 6 mujeres cosen 30 trajes en 8 horas de trabajo. ¿Cuántos trajes terminarán en 6 horas, si trabajan 16 mujeres?

A) 8
B) 15
C) 20
D) 60
E) 106

2. Si 30 hombres pavimentan 150 m de una carretera en 12 días, trabajando 8 horas diarias, ¿cuántos metros pavimentarían 16 hombres en 18 días, trabajando la misma cantidad de horas diarias?

A) 421,9
B) 187,5
C) 120,0
D) 53,3
E) 4,8

3. Una familia compuesta de 4 personas gasta mensualmente \$ 380.000. ¿Cuántas personas podrían vivir 16 días, en igualdad de condiciones, con \$304.000?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

EJERCICIOS

1. En la tabla de la figura 1, **A** y **B** son magnitudes directamente proporcionales. ¿Cuáles son los valores de **x** e **y**, respectivamente?

- A) 8 y 72
- B) 8 y 60
- C) 7 y 72
- D) 8 y 2
- E) 6 y 72

A	7	x	12
B	42	48	y

Fig. 1

2. Cuando nació Pedro, Mario tenía 8 años. Si actualmente sus edades están en la razón 3 : 5, ¿qué edad tiene Mario?

- A) 3 años
- B) 5 años
- C) 12 años
- D) 20 años
- E) 40 años

3. Las cantidades **a**² y **b** son inversamente proporcionales. Si para **a** = 2, se obtiene **b** = 3, entonces ¿cuál sería el valor de **a**, asociado a **b** = $\frac{4}{3}$?

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{2}{3}$
- C) $\frac{3}{4}$
- D) $\frac{3}{2}$
- E) 3

4. Si $x : y : z = 4 : 3 : 2$ y $2x + 4y - 3z = 28$, entonces el valor de **y** es

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 6
- E) 8

5. Al dividir 253 en partes proporcionales a los números 2, 5, 7 y 9, ¿cuál es la parte menor?
- A) 11
 - B) 22
 - C) 77
 - D) 99
 - E) 121
6. Hernán, Miguel y Osvaldo compraron un número de rifa y cuyos aportes fueron: Hernán \$ 800, Miguel \$ 500 y Osvaldo \$ 700. Si obtuvieron un premio de \$ 280.000, ¿cuánto le correspondió del premio a Miguel al realizarse el reparto en forma proporcional a lo aportado?
- A) \$ 50.000
 - B) \$ 70.000
 - C) \$ 80.000
 - D) \$ 98.000
 - E) \$ 112.000
7. En una guarnición hay 4.800 soldados con alimentos para 48 días. Si la dotación disminuyera a 3.200 hombres, ¿para cuántos días alcanzarían los alimentos?
- A) 80
 - B) 72
 - C) 64
 - D) 60
 - E) 32
8. Si b kilos de clavos valen \$ a , entonces $\frac{1}{2}$ kilo valdrá
- A) $2ab$
 - B) $\frac{a}{2}$
 - C) $\frac{b}{2a}$
 - D) $\frac{2b}{a}$
 - E) $\frac{a}{2b}$

9. En el gráfico de la figura 2, x e y son cantidades directamente proporcionales. Entonces, el valor de $a - 1$ es

- A) 1,5
- B) 2,5
- C) 3,5
- D) 4,0
- E) 5,0

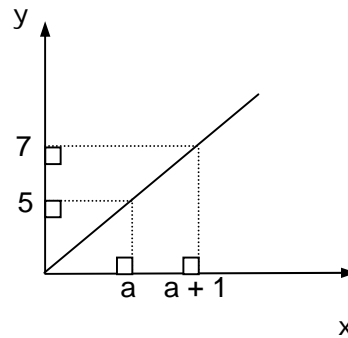


Fig. 2

10. El gráfico de la figura 3, muestra la hipérbola que resultó del estudio que se hizo en una campaña militar, en que se determinó la cantidad de días que dura cierta cantidad de alimentos, de acuerdo al número de soldados que los consumen. En base a la información proporcionada por este gráfico, se puede deducir que

- A) $p + q = 54$
- B) $t = 72$
- C) $t > q$
- D) $t < p$
- E) $t = 4p$

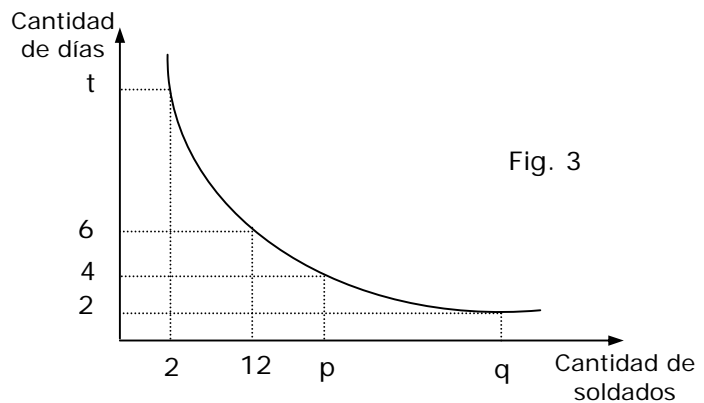


Fig. 3

11. Si 10 obreros construyen una casa en 6 meses, ¿cuánto tiempo se demorarían 12 obreros en construir una casa similar, trabajando el mismo número de horas al día?

- A) 7 meses y 6 días
- B) 6 meses y 6 días
- C) 5 meses
- D) 4 meses y 24 días
- E) 4 meses y 12 días

12. Si un sitio rectangular de 24 metros de frente por 45 metros de fondo, vale \$ 360.000, ¿cuánto valdría otro sitio rectangular de 32 metros de frente por 27 metros de fondo?

- A) \$ 25.920
- B) \$ 28.800
- C) \$ 45.000
- D) \$ 288.000
- E) \$ 450.000

13. En un recipiente hay 16 litros de una mezcla que contiene agua y alcohol. Si 7 litros de esta mezcla son de alcohol, ¿cuántos litros de agua deberán agregarse a la mezcla, para que la cantidad de alcohol y el total de la mezcla queden en la razón 1 : 3?
- A) 4
 B) 5
 C) 11
 D) 12
 E) 21

14. Con respecto a la tabla de la figura 4, ¿cuál es el valor de $x + y + z$?

(1) A y B son magnitudes directamente proporcionales.

(2) $x^2 = 64$ y $3z = 45$

- A) (1) por sí sola
 B) (2) por sí sola
 C) Ambas juntas, (1) y (2)
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 E) Se requiere información adicional

A	5	x	z	30
B	30	48	90	y

Fig. 4

15. ¿A cuántos billetes de color verde, equivale un billete de color azul?

(1) Un billete de color azul equivale a mil unidades.

(2) Un billete de color verde equivale a dos billetes de color rojo, y un billete de color rojo equivale a diez unidades.

- A) (1) por sí sola
 B) (2) por sí sola
 C) Ambas juntas, (1) y (2)
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Ejemplos Págs.	1	2	3	4
1	B	D		
2	E	E		
3	D	B	C	
4 y 5	A	E	D	D
6 y 7	C	C	B	D
8	D	C	E	

CLAVES PÁG. 9

1. A 6. B 11. C
 2. D 7. B 12. D
 3. E 8. E 13. B
 4. D 9. A 14. A
 5. B 10. A 15. C