MATERIAL N° 001-I

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 1

UNIDAD: NÚMEROS Y PROPORCIONALIDAD

NATURALES Y ENTEROS

NÚMEROS NATURALES Y CARDINALES (IN, IN_0)

Los elementos del conjunto **IN** = {1, 2, 3, …} se denominan **"números naturales".** Si a este conjunto le unimos el conjunto formado por el cero, obtenemos **IN_0** = {0, 1, 2, …} llamado "conjunto de los **números cardinales**".

NÚMEROS ENTEROS (Z)

Los elementos del conjunto **Z** = { …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, …} se denominan **"números enteros" .** Algunos subconjuntos de **Z** son:

Z^+ = {1, 2, 3, …} enteros positivos

Z_0^+ = {0, 1, 2, … } enteros no negativos

Z^- = {-1, -2, -3, …} enteros negativos

Z_0^- = {0, -1, -2, -3, …} enteros no positivos

$$\boxed{Z = Z^- \cup \{ 0 \} \cup Z^+}$$

EJEMPLOS

1. Si a = -4 y b = 2, entonces -3a : b - [-a - 2 -(b - a)] es igual a

   A) -22
   B) - 2
   C) 2
   D) 10
   E) 14

2. Un comerciante compró 30 pañuelos a $200 cada uno y vendió 20 a $180 cada uno. ¿A cuánto vendió, en promedio, cada uno de los pañuelos restantes si se sabe que no ganó ni perdió dinero?

   A) $190
   B) $200
   C) $240
   D) $250
   E) $260

DEFINICIONES: Sea **n** un número entero, entonces:

1. El sucesor de n es (n + 1)
2. El antecesor de n es (n - 1)
3. El entero 2n es siempre par
4. El entero (2n - 1) es siempre impar
5. El entero (2n + 1) es siempre impar
6. El par sucesor de 2n es (2n + 2)
7. El par antecesor de 2n es (2n - 2)
8. El impar sucesor de (2n + 1) es (2n + 3)
9. El impar antecesor de (2n + 1) es (2n - 1)
10. El cuadrado perfecto de n es n^2
11. El cubo perfecto de n es n^3

OBSERVACIONES:

1. Son cuadrados perfectos los enteros: 1, 4, 9, 16, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, …
2. Son cubos perfectos los enteros: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, … y también: -1, -8, -27, -64, -125, -216, -343, …

EJEMPLOS

1. Si **n** es un número natural par, entonces el sucesor par del sucesor de **n + 1** está representado por

   A) n + 2
   B) n + 3
   C) n + 4
   D) 2n + 2
   E) 2n + 4

2. Si **p** es un número entero, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

   I) (p^2 – 1) es el entero antecesor del cuadrado de p.
   II) -(p - 1) es el entero antecesor de p.
   III) $(p + 1)^2$ es el cuadrado del entero sucesor de p.

   A) Sólo I
   B) Sólo III
   C) Sólo I y II
   D) Sólo I y III
   E) I, II y III

POTENCIAS EN Z

DEFINICIÓN

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots}_{\textbf{n factores}} = a^n, \quad \text{con } a \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+$$

PROPIEDADES

1. $0^n = 0$, si $n \in \mathbb{Z}^+$
2. $1^n = 1$
3. Si n es par, $(-1)^n = 1$
4. Si n es impar, $(-1)^n = -1$

Signos de una potencia: $a^n = \begin{cases} \text{Positivo si } a \neq 0 \text{ y } n \text{ es par.} \\ \text{Negativo si } a < 0 \text{ y } n \text{ es impar.} \end{cases}$

EJEMPLOS

1. ¿Cuál es el valor de $(-1)^2 + 1^2 - 2^2 - (-2)^2$?

   A) -10
   B) - 6
   C) 2
   D) 6
   E) 10

2. Un pliego de cartulina de 2 mm de espesor se dobla por la mitad, repitiendo el proceso 25 veces. La altura que alcanzaría esta cartulina después del vigésimo quinto doblez sería

   A) 2^{24} mm
   B) 2^{25} mm
   C) 2^{26} mm
   D) 2^{27} mm
   E) 2^{50} mm

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE POTENCIAS

Sean **a** y **b** $\in \mathbb{Z}$, **m** y **n** $\in \mathbb{Z}^+$

1.- Multiplicación de potencias de igual base

$$\mathbf{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

2.- División de potencias de igual base

$$\mathbf{a^n : a^m = a^{n-m} \quad n \geq m,\ a \neq 0}$$

3.- Multiplicación de potencias de distinta base e igual exponente

$$\mathbf{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$$

4.- División de potencias de distinta base e igual exponente

$$\mathbf{a^n : b^n = (a : b)^n \quad b \neq 0}$$

EJEMPLOS

1. $-3^8 \cdot 3^2 =$

   A) -3^{16}
   B) -3^{10}
   C) -3^6
   D) 3^{10}
   E) $(-9)^{16}$

2. $5^8 : (-5)^2 =$

   A) -5^{10}
   B) -5^6
   C) 5^4
   D) 5^6
   E) 5^{10}

3. $4^5 \cdot 6^5 \cdot 24^2 =$

   A) 24^{24}
   B) 24^{12}
   C) 24^{10}
   D) 24^7
   E) 24^3

4. $(-4)^2 : 2^2 =$

   A) 16
   B) 4
   C) 2
   D) -2
   E) -4

DEFINICIÓN

$$\mathbf{a^0 = 1 \quad a \neq 0}$$

OBSERVACIÓN: 0^0 no está definido

POTENCIA DE UNA POTENCIA

$$\mathbf{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

EJEMPLOS

1. $-2^0 - 3^2 =$

   A) -10
   B) -9
   C) -8
   D) 8
   E) 10

2. $4^3 \cdot 8^2 =$

   A) 32^6
   B) 32^5
   C) 2^{12}
   D) 2^{10}
   E) 2^8

3. $[\ (15^4\ )^{-5}\ \cdot 15^{20}\ ] :\ 15^0\ =$

   A) 15^{20}
   B) 15^{19}
   C) 15^{15}
   D) 1
   E) 0

MÚLTIPLO Y DIVISOR

En la expresión $\mathbf{a = b \cdot c}$ en que **a**, **b** y **c** son números enteros, **a** es múltiplo de **b** y de **c** o bien **b** y **c** son divisores o factores de **a**.

EJEMPLOS

1. Si M(n) representa el conjunto formado por todos los números enteros múltiplos de n, entonces $\{... -18, -9, ,0, 9, 18, ...\}$ corresponde al conjunto

   A) M(3)
   B) M(6)
   C) M(9)
   D) M(18)
   E) Z

2. ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) divisores de 105?

   I) 15
   II) 21
   III) 35

   A) Sólo I y II
   B) Sólo I y III
   C) Sólo II y III
   D) I, II y III
   E) Ninguno de ellos

3. Si $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $B = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ y $C = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$, entones ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

   I) 2^3 es un divisor común de A y C.
   II) B es múltiplo de $3^2 \cdot 5$.
   III) $2 \cdot 3^2$ es divisor común de A, B y C.

   A) Sólo II
   B) Sólo III
   C) Sólo II y III
   D) I, II y III
   E) Ninguna de ellas

REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Un número entero es divisible:

Por	Cuando
2	Termina en cifra par.
3	La suma de sus cifras es múltiplo de tres.
4	Las dos últimas cifras forman un número múltiplo de cuatro o bien son ceros.
5	La última cifra es cero o cinco.
6	Es divisible por dos y por tres a la vez.
7	La diferencia entre el doble de la última cifra y el número que forman las cifras restantes es múltiplo de siete.
8	Las tres últimas cifras forman un número múltiplo de ocho o bien son ceros.
9	La suma de sus cifras es múltiplo de nueve.
10	Termina en cero.
11	La diferencia entre la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares y las que ocupan los lugares impares es múltiplo de once.

EJEMPLOS

1. ¿Cuál debe ser el mayor valor del dígito x para que el número a = 6x542 sea divisible por 3?

   A) 0
   B) 1
   C) 4
   D) 7
   E) 9

2. ¿Cuántos números enteros positivos de dos cifras tienen la siguiente propiedad: “Es divisible por 6 y la cifra de las unidades es el sucesor de la cifra de las decenas”?

   A) Ninguno
   B) 1
   C) 2
   D) 3
   E) Más de 3

NÚMEROS PRIMOS, COMPUESTOS Y DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

Números primos: Son aquellos enteros positivos que tienen sólo dos divisores distintos. Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, …

Números compuestos: Son todos los enteros positivos mayores que uno que no son primos. Los primeros números compuestos son: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, …

TEOREMA FUNDAMENTAL

Todo número compuesto se puede expresar de manera única como el producto de factores de números primos.

EJEMPLOS

1. Si a es primo, entonces a^2 es necesariamente un número

   A) Par
   B) Impar
   C) Primo
   D) Compuesto
   E) Par y compuesto

2. El número 2.856 es el producto de tres factores. Si dos de los factores son 12 y 14, ¿cuál es el otro factor?

   A) 17
   B) 16
   C) 15
   D) 13
   E) Ninguna de las anteriores

3. Al expresar los números 60 y 90 en factores primos, se obtiene respectivamente

   A) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
   B) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
   C) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
   D) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2^2 \cdot 3 \cdot 5$
   E) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Es el menor múltiplo común positivo de dos o más enteros.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

Es el mayor divisor común entre dos o más enteros.

CÁLCULO DEL m.c.m. Y M.C.D MEDIANTE DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Se descomponen los números en factores primos:

1. El **m.c.m**. se obtiene como producto de todos los factores primos. En el caso de existir factores primos comunes se considera aquel que posea el exponente mayor.

2. El **M.C.D**. se obtiene como producto de los factores primos comunes considerando aquel que posea el exponente menor.

EJEMPLOS

1. El **m·c·m** y **M·C·D** entre $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ y $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ son respectivamente

   A) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ y $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
   B) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ y $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
   C) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ y $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$
   D) $2^3 \cdot 3^3$ y $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
   E) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 11$ y $2^2 \cdot 3^2$

2. Si un niño comienza contando de 5 en 5, y otro lo hace de 6 en 6, ¿en qué número se encuentran por segunda vez?

   A) 15
   B) 30
   C) 45
   D) 60
   E) 75

3. ¿Cuál es la regla de mayor longitud con la que se puede medir exactamente las tres longitudes siguientes: 180 cm, 240 cm y 400 cm?

   A) 8 cm
   B) 12 cm
   C) 20 cm
   D) 24 cm
   E) 40 cm

EJERCICIOS

1. $-3^2 - 2^4 =$

   A) -25
   B) -14
   C) -7
   D) 7
   E) 25

2. ¿Cuál es el valor de $(-n)^{n-1} - (n)^n$ cuando $n = 3$?

   A) -18
   B) -15
   C) - 3
   D) 3
   E) 36

3. $5 - \{-2^2 - [16 : (5^2 - 3^3)]\} =$

   A) -7
   B) -3
   C) -1
   D) 1
   E) 17

4. $6^3 + 6^3 + 6^3 + 6^3 + 6^3 + 6^3 =$

   A) 6^3
   B) 6^4
   C) 6^{18}
   D) 36^3
   E) 36^{18}

5. Si **m** es un número entero impar, el número impar antecesor de $3m + 6$ es

A) $3m$
B) $3m + 8$
C) $3m + 7$
D) $3m + 5$
E) $3m + 4$

6. Si **p** es un número entero par y **q** es un número entero impar, entonces ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) **siempre** verdadera(s)?

I) p^2 un número positivo.
II) $-q^2$ es un número positivo.
III) $(p - q)^2$ es un número impar positivo.

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) Ninguna de ellas

7. Si **t + 3** es el sucesor del número natural **n**, entonces el sucesor de **t** en función de **n** es

A) $n + 2$
B) $n + 1$
C) n
D) $n - 1$
E) $n - 2$

8. Sea **M** un conjunto de tres números naturales pares consecutivos, cuyo elemento menor es **(n – 4)**, entonces ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s)?

I) El promedio de los tres términos es $n - 2$.
II) El producto de los tres números es par.
III) La suma de los tres números es múltiplo de 6.

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

9. Si **k** es un número entero, entonces $[(-1)^k + (-1)^{k+1}] - (-1^2)$ es igual a

A) -1
B) 0
C) 1
D) 2
E) 3

10. La expresión $2^4 \cdot 3^3 + 2^3 \cdot 3^2$ es equivalente a

A) $2^7 \cdot 3^5$
B) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$
C) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$
D) $2^2 \cdot 3$
E) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

11. ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) divisibles(s) por 18?

I) $3^4 \cdot 2^2$
II) $3 \cdot 2^3$
III) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

12. El mínimo común múltiplo entre **a** y **b** es 36 con $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Entonces, los valores posibles de **a** y **b** pertenecen a

I) Los múltiplos de 36.
II) Los divisores de 36.
III) La intersección entre los múltiplos de 36 y los divisores de 36.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo II y III

13. ¿Cuál de los siguientes números no es divisor de $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2$?

A) 7
B) $2^2 \cdot 7^2$
C) $2 \cdot 3 \cdot 7$
D) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
E) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2$

14. El m.c.m. y el M.C.D. de los números 666, 777 y 888 son respectivamente

A) $37 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ y 37
B) $37 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ y $37 \cdot 3$
C) $37 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ y $37 \cdot 3$
D) $37 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 7$ y $37 \cdot 3^2$
E) $37 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ y 37

15. A una distribuidora se le solicita un pedido de bebidas de tres tipos diferentes:

Tipo A: 18 bebidas
Tipo B: 45 bebidas
Tipo C: 135 bebidas

Si la embotelladora debe enviar las bebidas en cajas, todas de igual tamaño y con un mismo tipo de bebida, ¿cuántas bebidas deben contener las cajas para que éstas sean el menor número posible?

A) 3
B) 6
C) 9
D) 12
E) 18

16. Dos letreros luminosos se encienden con intermitencias de 42 y 54 segundos respectivamente. Si a las 20 horas y 15 minutos se encuentran ambos encendidos, ¿a qué hora estarán nuevamente ambos encendidos?

A) 20 hr 21 min 18 seg
B) 20 hr 21 min 42 seg
C) 20 hr 21 min 36 seg
D) 20 hr 15 min 54 seg
E) 20 hr 16 min 54 seg

17. Con un balde a su máxima capacidad se saca totalmente el agua de los depósitos de la figura 1. ¿Cuál debe ser la máxima capacidad de dicho balde para efectuar el menor número de extracciones?

A) 2 lt
B) 3 lt
C) 6 lt
D) 12 lt
E) 24 lt

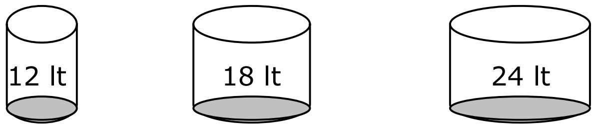

Fig. 1

18 Tres líneas de buses salen al litoral central con frecuencias de 6, 8 y 12 minutos respectivamente. Si a las 7:00 horas A.M. salen simultáneamente las tres líneas, en su primera salida, ¿cuántas salidas simultáneas tendrán las tres líneas hasta las 10:00 A.M.?

A) 9
B) 8
C) 7
D) 6
E) 3

19. Sea **n** $\in \mathbb{Z}$**.** La expresión 3(1 + n) representa un múltiplo de 6 si:

(1) n es un número impar.

(2) n+1 es un número par.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas
D) Cada una por sí sola
E) Se requiere información adicional

20. Sea P = {h, j, k} con un solo elemento par. ¿Qué elemento de P es un número par?

(1) (h + j) es par.

(2) (h + k) es impar y j es impar.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3	4
1	D	C		
2	C	D		
3	B	C		
4	B	D	D	B
5	A	C	D	
6	C	D	C	
7	D	C		
8	D	A	B	
9	C	D	C	

CLAVES PÁG. 10

1. A	6. B	11. D	16. A
2. A	7. D	12. B	17. C
3. D	8. E	13. E	18. B
4. B	9. C	14. C	19. D
5. E	10. E	15. C	20. A

DCIMA001-I