MATERIAL N° 060

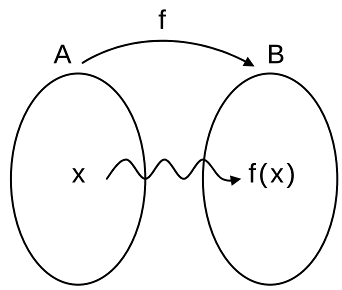
GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 27

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

FUNCIONES

DEFINICIÓN

Sean **A** y **B** subconjuntos no vacíos de los números reales. Una función **f** de **A** en **B**, es una relación que asigna a cada elemento **x** del conjunto **A** **uno y sólo un elemento** **y** del conjunto **B**.



Lo cual se expresa como:

$f : A \longrightarrow B$

Para cada elemento $x \in A$ se usará la notación **f(x)** para indicar el elemento de B que ha sido asignado a x.

OBSERVACIONES

- Al conjunto **A** que es el conjunto de partida se le llama **dominio** y al conjunto **B** que es el conjunto de llegada se le llama **codominio** de la función.
- **y** es la imagen de **x** mediante **f**, se escribe **y = f(x).**

EJEMPLO

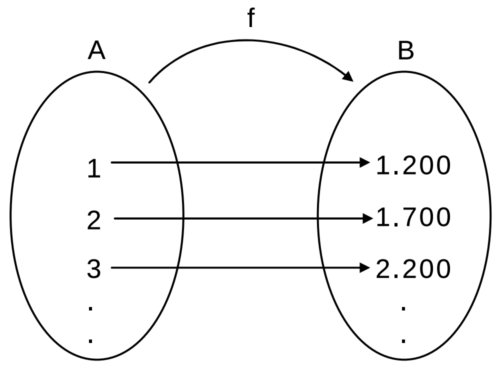
1. Un estacionamiento de automóviles cobra $700 por ingresar al recinto y $500 por cada hora o fracción adicional. El cobrador determina el valor a pagar mediante la tabla siguiente:

N° horas	1	2	3	...
$	1.200	1.700	2.200	...

OBSERVACIÓN

Como el valor a cancelar depende del tiempo transcurrido que el automóvil permanece en el estacionamiento se dice que el cobro depende o está en **función** del tiempo.

Si el conjunto A es el tiempo en horas y el conjunto B es el valor a cancelar en pesos, y denotándose la correspondencia entre estos dos conjuntos por f, se tiene que



Otra forma de expresarlo es

$$f(1) = 1.200$$
$$f(2) = 1.700$$
$$f(3) = 2.200$$
$$\vdots$$

siendo $f(x) = 500x + 700$ la expresión general que nos permite hallar el valor de la función dado cualquier valor de x.

EJEMPLOS

1. Si un automóvil permaneció 6 horas en el estacionamiento

   $f(x) = 500x + 700$
   $f(x) = 500\,(6) + 700$
   $f(x) = 3700$

   Es decir, se debe cancelar 3.700 pesos

2. Si otro automovilista ha cancelado \$5.700 pesos, se tiene que

   $f(x) = 500\,x + 700$
   $5700 = 500\,x + 700$
   $5000 = 500\,x$
   $10 = x$

   Es decir, el auto permaneció en el estacionamiento 10 horas.

OBSERVACIÓN

Como el valor a cobrar $y = f(x)$ **depende** del número de horas **x** que el auto está estacionado, se dice que **x** es la variable independiente e **y** la variable dependiente.

TIPOS ESPECIALES DE FUNCIONES

FUNCIONES PARES: Son aquellas que adquieren el mismo valor para un **x** cualquiera y su opuesto.

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

FUNCIONES IMPARES: Son aquellas que adquieren valores opuestos para un **x** cualquiera y su opuesto.

$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

OBSERVACION: Las funciones pares tienen una gráfica que es simétrica respecto al eje de las ordenadas, mientras que las funciones impares tienen gráficas simétricas respecto del origen

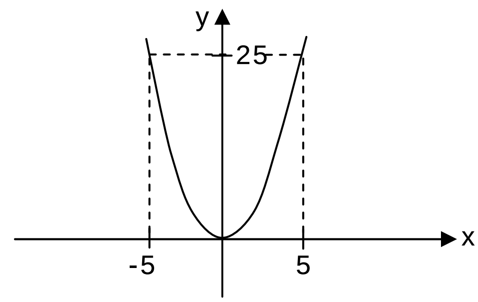
EJEMPLOS

1. La función $y = x^2$ es par, dado que

$f(5) = f(-5)$

$(5)^2 = (-5)^2$

$25 = 25$

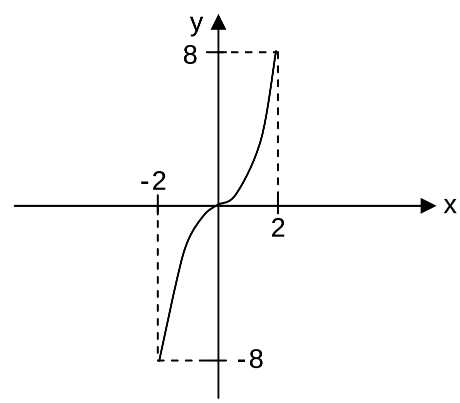


2. La función $y = x^3$ es impar, puesto que

$f(2) = -f(-2)$

$(2)^3 = -(-2)^3$

$8 = 8$



FUNCIÓN PARTE ENTERA

$$\boxed{f(x) = [\,x\,] \quad \text{con } x \in \mathrm{IR}.}$$

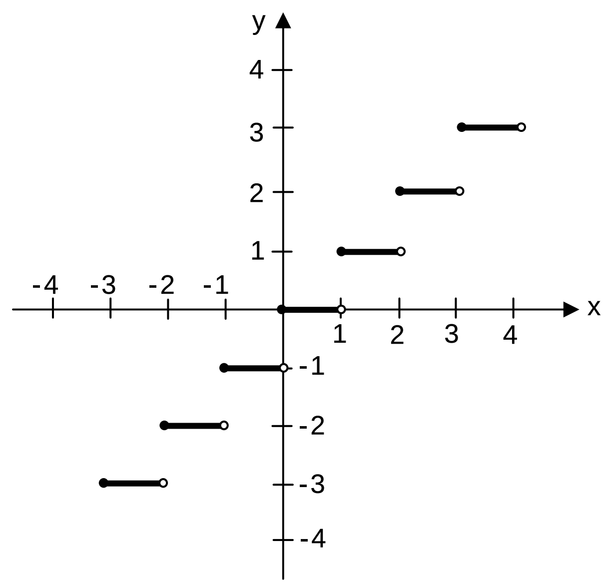
Dado que todo número real tiene una parte entera y una parte decimal, por ejemplo el número 6,215, esta función persigue que al número real 6,215 se le asocie el número real 6.

En general, dado un número real **x**, existe un número entero **n** tal que $n \leq x < n + 1$, donde la parte entera de **x** es **n**, y se expresa por $[\,x\,] = n$

Su representación gráfica es

$f(x) = [\,x\,]$

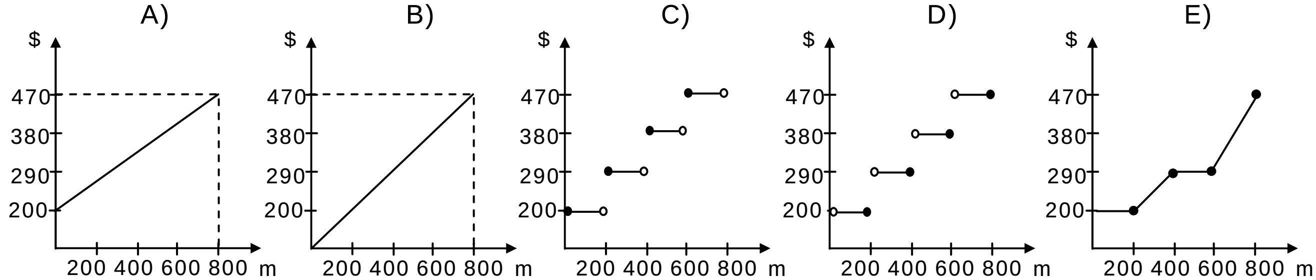
x	**f(x)**
-1,7	-2
-1	-1
-0,3	-1
0	0
0,5	0
1	1
1,6	1
2	2
2,3	2



OBSERVACIÓN: A la gráfica de esta función se le llama **"función escalonada".**

EJEMPLO

1. ¿Cuál es la gráfica que muestra el cobro de un taxi cuya bajada de bandera es \$200 con lo que quedan cancelados los primeros 200 metros y cada 200 metros adicionales el taximetro sube \$90?



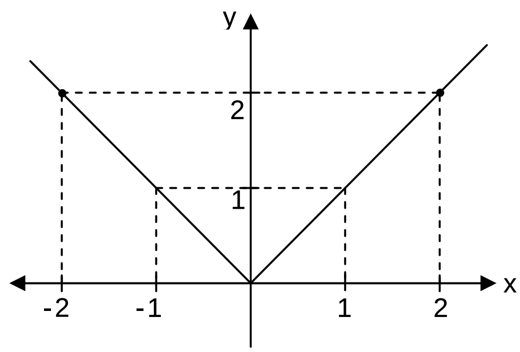
FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

"El valor absoluto de un número $x \in \mathbb{R}$, denotado por $|x|$, es siempre un número real **no negativo**".

Se define la función valor absoluto de x, por

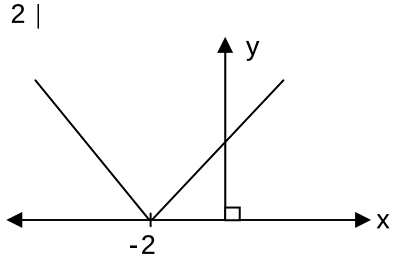
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	2
f(x)	2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	2

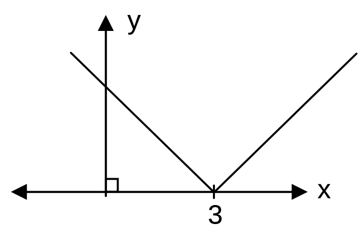


1. Observa las siguientes gráficas de las funciones dadas

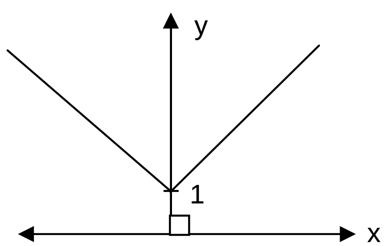
i) $f(x) = |x + 2|$



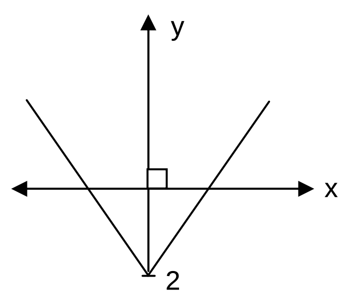
2i) $f(x) = |x - 3|$



3i) $f(x) = |x| + 1$

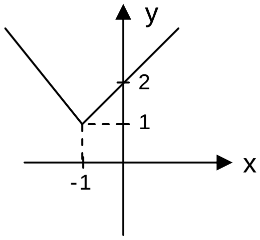


4i) $f(x) = |x| - 2$

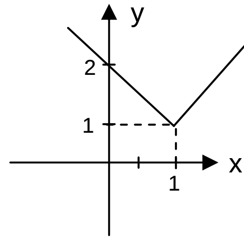


2. La gráfica que representa a $f(x) = |x - 1| + 1$ es

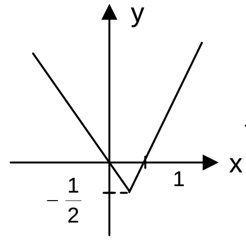
A)



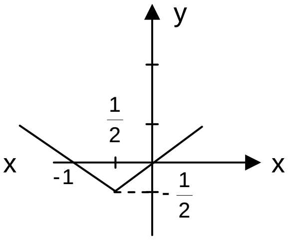
B)



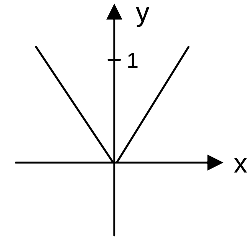
C)



D)



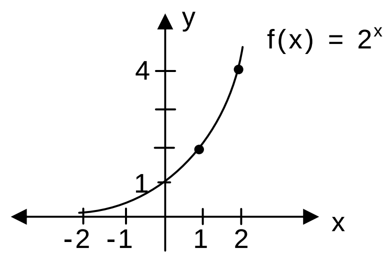
E)



FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función **f** definida por $\boxed{f(x) = a^x, \text{ con } a \in IR^+ \text{ y } a \neq 1}$

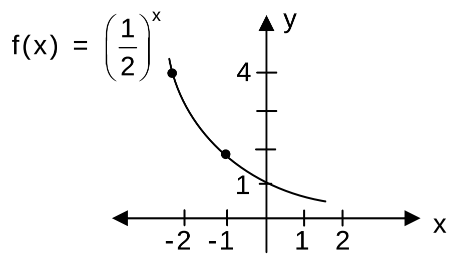
se denomina **función exponencial.**



GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

1) $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

En las gráficas se puede observar que:

- La gráfica intersecta al eje de las ordenadas en el punto (0, 1).
- Si $a > 1$, entonces $f(x) = a^x$ es creciente.
- Si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$ es decreciente.
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, para $a > 1$.
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, para $0 < a < 1$.
- La gráfica no corta al eje de las abscisas.

EJEMPLO

Con respecto a la función $f(x) = 5x$, ¿cuál de las siguientes opciones es FALSA?

A) La función f(x) es creciente
B) $f(2) = 25$
C) La gráfica no intersecta al eje de las abscisas
D) La gráfica intersecta al eje de las ordenadas en el punto (1, 0)
E) $f(-2) < f(2)$

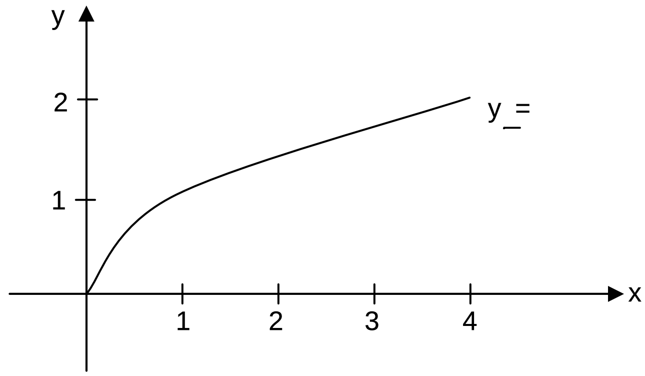
FUNCIÓN RAÍZ

Si **x** es un número real no negativo, se define la función raíz cuadrada de **x** por

$$\boxed{\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}}$$

Su representación gráfica es

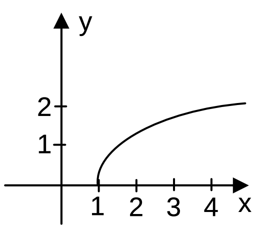
x	f(x)
0	0
0,5	0,70..
1	1
1,5	1,22..
2	1,41..
2,5	1,58..
3	1,73..
3,5	1,87..
4	2

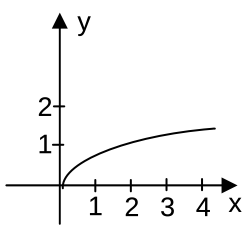


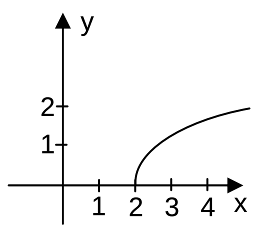
OBSERVACIÓN:
- La función es creciente.
- La función raíz cuadrada es considerada como un modelo de crecimiento lento.

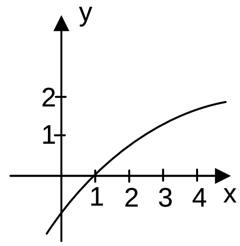
EJEMPLO

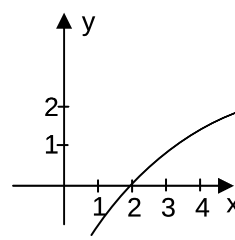
La gráfica de la función $h(x) = \sqrt{x-2}$ es

A)


B)


C)


D)


E)


FUNCIÓN LOGARÍTMICA

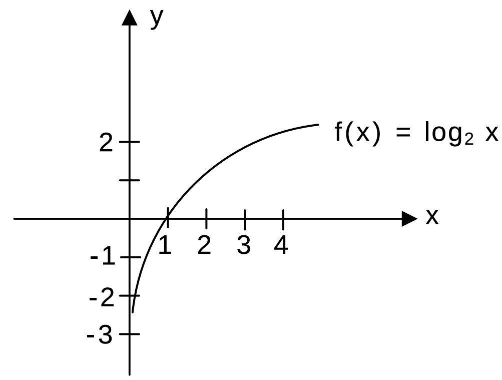
Una función **f** definida por $\boxed{f(x) = \log_a x, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^+, \ a \neq 1 \ \text{ y } \ x > 0}$

se denomina **función logarítmica.**

GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN LOGARTÍMICA

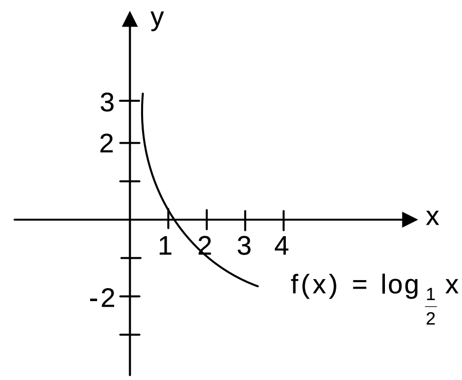
i) $f(x) = \log_2 x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3



ii) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f(x)	3	2	1	0	-1	-2	-3



En las gráficas se puede observar que:

- La gráfica intersecta al eje x en el punto (1, 0).
- Si $a > 0$, entonces $f(x) = \log_a x$ es creciente.
- Si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = \log_a x$ es decreciente.
- $\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 < x_2$, para $a > 1$.
- $\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 > x_2$, para $0 < a < 1$.
- La curva no intersecta al eje y.

EJEMPLO

Respecto a la función $f(x) = \log_2 (x + 1)$, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

I) Si $x = -1$, $f(x) = 1$
II) Si $x = 0$, $f(x) = 0$
III) Si $f(x) = 2$, $x = 3$

A) Sólo II
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) Sólo II y III

DOMINIO Y RECORRIDO

DOMINIO: Es el conjunto de valores reales que puede tomar la variable **x** para que la función f(x) tenga un valor real.

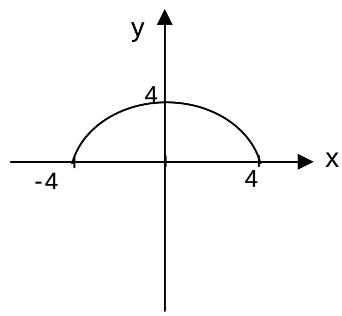
RECORRIDO: Es el conjunto de valores reales que toma la función **f(x)**

EJEMPLOS

1. La función $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ sólo admite valores de la variable **x**, tales que $-4 \leq x \leq 4$ **(dominio)**, ya que en caso contrario nos encontraríamos con la raíz cuadrada de un número negativo, que no es un número real.

   Por otra parte, la función f(x) puede tomar valores reales tales que $0 \leq f(x) \leq 4$ **(recorrido)**, puesto que el radicando oscila entre 0 y 16.

   La figura adjunta muestra la gráfica correspondiente



2. En las siguientes funciones determina el dominio y/o recorrido

a. $f(x) = 3x^2 + 6x$ Dominio: Recorrido:

b. $f(x) = | x |$ Dominio: Recorrido:

CEROS DE UNA FUNCIÓN

Se llaman ceros de una función a los valores de la variable **x** que hacen que la función **f(x)** sea igual a cero.

Así por ejemplo, para

determinar los ceros de la función $y = x^2 - x^4$ se tiene:

$y = x^2 - x^4$

$y = x^2(1 - x^2)$

$y = x^2(1 - x)(1 + x)$

$0 = x^2(1 - x)(1 + x)$

Luego los ceros de la función son: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$

OBSERVACIÓN: En un gráfico los ceros de la función son los valores donde la gráfica intersecta al eje x, ya que en esos puntos $y = f(x)$ se hace igual a 0.

EJEMPLOS

1. ¿Cuáles son los ceros de la función $f(x) = x(x - 2)(x + 1)$?

A) 0 y 2
B) 2 y 1
C) -2 y 1
D) 0, -2 y 1
E) 0, 2 y -1

2. ¿Cuántos ceros tiene la función $f(x)$ definida para $a \leq x \leq b$ y cuya gráfica es la que se muestra en la figura 1?

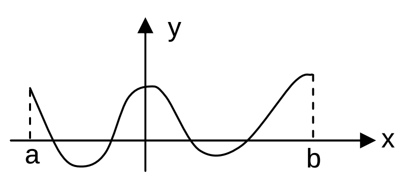


Fig. 1

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) Ninguno porque f(x) no es función

APLICACIONES LINEALES

En el quehacer cotidiano hay muchos problemas que se tratan con funciones y por ende es necesario saber expresar una situación práctica en términos de una relación funcional. La función que se obtiene produce un **modelo matemático** de la situación.

EJEMPLOS

1. En una cuenta del agua potable se consigna un cargo fijo de $900. Sabiendo que el modelo de cálculo de tarifas es un modelo lineal y que por un consumo de 15 m^3 se facturó el mes pasado $6.000, ¿cuál es la función lineal que permite calcular el costo **G** de **x** m^3 de agua?

   A) $G = 900 + \dfrac{6.000}{15}x$

   B) $G = 900 + 15 \cdot 6.000\,x$

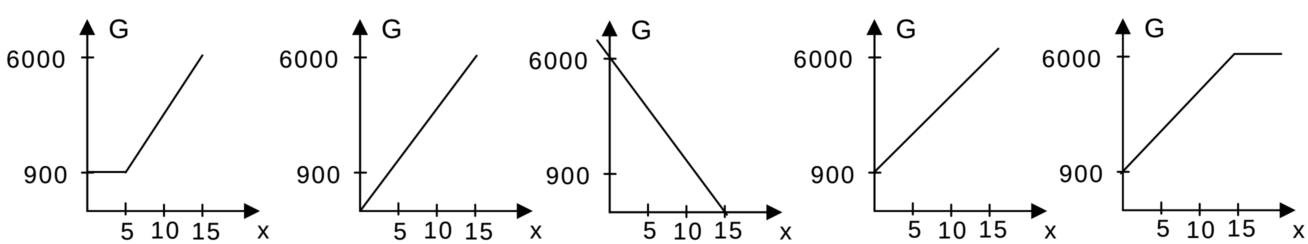
   C) $G = 900 - 15 \cdot 6.000\,x$

   D) $G = 900 + \dfrac{6.000 - 900}{15}x$

   E) $G = 900 - \dfrac{6.000 - 900}{15}x$

2. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la situación anterior?

   A) B) C) D) E)



EJERCICIOS

1. El conductor de un vehículo a la entrada de un estacionamiento pregunta por la tarifa: el funcionario a cargo le responde que deberá cancelar \$750 por la primera hora y, \$700 por cada hora siguiente o fracción. ¿Cuánto tiempo podrá permanecer el vehículo en el estacionamiento si el conductor dispone hasta \$2.000?

   A) 1 hr. y 15 minutos
   B) 1 hr. y 30 minutos
   C) 2 hrs.
   D) 2 hrs. y 30 minutos
   E) 3 hrs.

2. La ecuación $3d + 5t = 30$ representa la distancia "d", en metros, y el tiempo "t", en minutos, del viaje de una tortuga. ¿Cuánto tiempo emplea en ubicarse a 6 metros del punto de partida?

   A) 3 minutos
   B) 2,5 minutos
   C) 2,4 minutos
   D) 2 minutos
   E) Ninguna de las anteriores

3. Para broncearse en el verano se recomienda partir con 15 minutos de exposición al sol el primer día, con la debida protección según la piel de cada uno y, gradualmente ir aumentando 1 minuto por cada día siguiente, hasta un máximo de media hora. La ecuación que relaciona el tiempo "t" de bronceado para el día "d" es

   A) $t = 0{,}15 + d$
   B) $t = 1{,}50 + d$
   C) $t = 15 + d$
   D) $t = 15d + 15$
   E) $t = 15 + (d - 1)$

4. La ecuación del movimiento rectilíneo uniforme es $d = d_0 + v_0 \cdot t$, en que d_0 es la posición inicial en que se encuentra un vehículo, v_0 es su rapidez inicial, y t es el tiempo. Un vehículo que partió de Buin (30 km al sur de Santiago) hacia Talca, con una rapidez inicial de 60 $\frac{km}{h}$ y manteniendo esta rapidez todo el viaje, ¿a qué distancia de Santiago se encuentra luego de dos horas y media de viaje?

   A) 80 km
   B) 100 km
   C) 140 km
   D) 180 km
   E) 200 km

5. Para estucar un edificio, los albañiles hacen el siguiente detalle de gastos:
   a) La mezcla (cemento, arena y agua) vale \$750, y demora 15 minutos en usarla.
   b) La mano de obra vale \$3.500 la hora.
   c) El uso de equipos cuesta \$2.000.

   La ecuación para determinar el gasto del trabajo en un cierto tiempo t, expresado en horas es

   A) $C = 3.000\,t + 2.000$
   B) $C = 3.500\,t + 2.000$
   C) $C = 5.000\,t + 2.500$
   D) $C = 5.500\,t + 2.500$
   E) $C = 6.500\,t + 2.000$

6. Una empresa contrata a un empleado por 50 días, pagándole \$36.000 por cada día completo trabajado y con la condición de que por cada día trabajado parcialmente se rebaja de este salario \$24.000. Finalizado el trabajo, el empleado recibió \$108.000. La ecuación que relaciona los días completos trabajados (x) respecto del dinero recibido es

   A) $36.000x + 12.000(50 - x) = 1.080.000$
   B) $36.000x + 24.000(50 - x) = 1.080.000$
   C) $36.000x - 24.000(50 - x) = 1.080.000$
   D) $36.000x - 12.000(50 - x) = 1.080.000$
   E) $6.000x - 4.000(50 - x) = -120.000$

7. Dos empresas A y B ofrecen las siguientes ofertas de conexión a internet:

   A: \$9.000 por 40 horas + \$900 por cada hora adicional.

   B: \$10.500 por 40 horas + \$600 por cada hora adicional.

   ¿Al cabo de cuántas horas daría lo mismo usar cualquiera de los dos servicios?

   A) 5
   B) 45
   C) 50
   D) 55
   E) 60

8. Un fabricante de cajas de cartón desea producir cajas sin tapas a partir de piezas cuadradas de cartón de 20 cm de lado, cortando cuadrados iguales de lados x cm de longitud, en las cuatro esquinas y doblando las caras (Ver figura 1). Entonces, el volumen de la caja en función de **x** es

   A) $V(x) = x(20 - 2x)(20 + 2x)$
   B) $V(x) = x(20 - 2x)(20 - 2x)$
   C) $V(x) = x(20 + 2x)(20 + 2x)$
   D) $V(x) = x(x - 20)(x - 20)$
   E) $V(x) = x(2x + 20)(20 - 2x)$

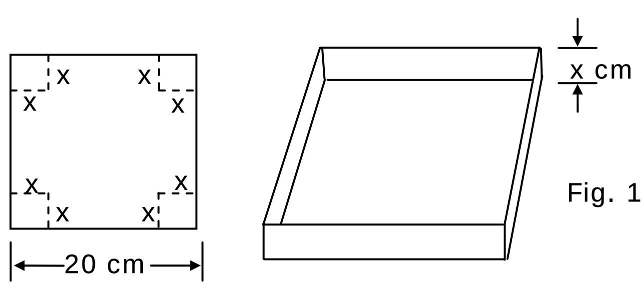


Fig. 1

9. El gráfico de la figura 2, muestra la equivalencia de cambio entre dólares y pesos. ¿A cuántos pesos corresponden 8 dólares y medio?

A) $6.400
B) $5.950
C) $5.600
D) $5.100
E) No se puede determinar

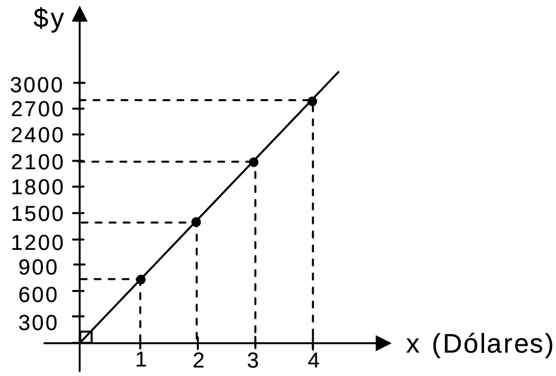
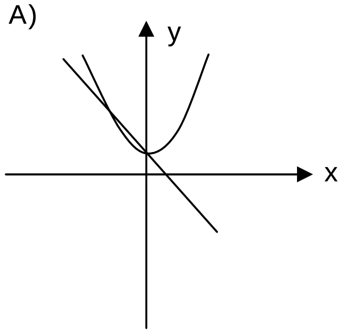


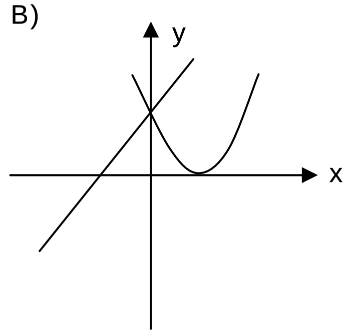
Fig. 2

10. ¿En cuál de las opciones siguientes se grafica las funciones $f(x) = x + \frac{1}{2}$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$?

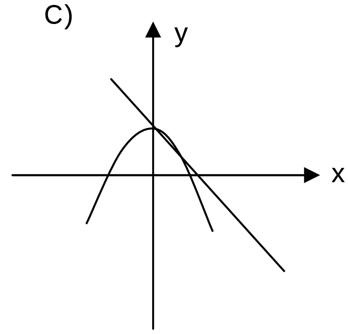
A)



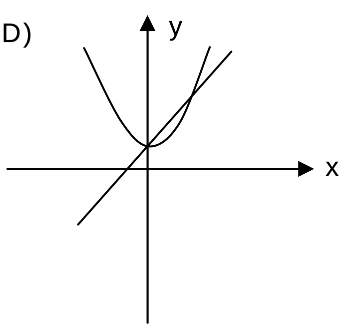
B)



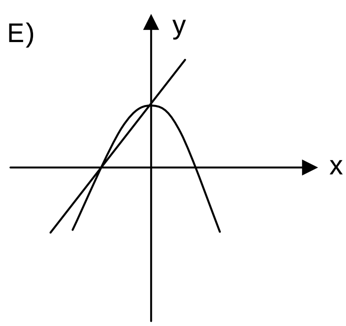
C)



D)



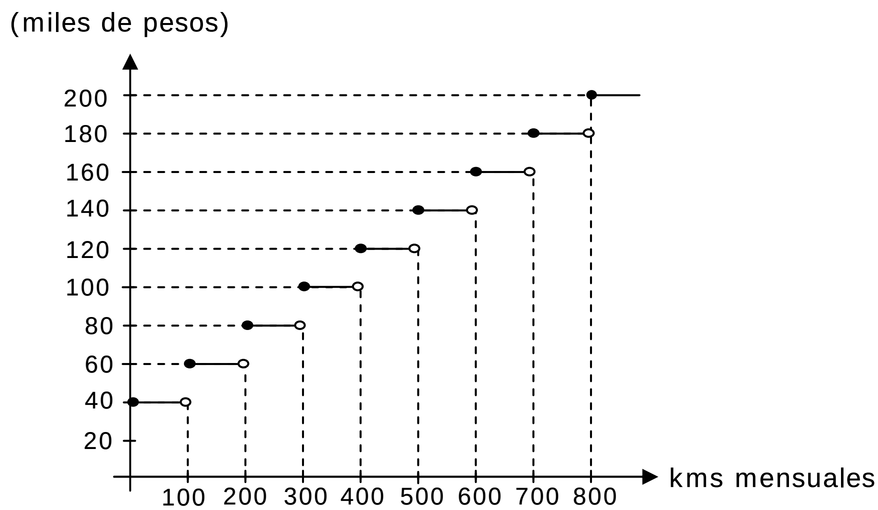
E)



11. El cargo fijo de una cuenta por consumo de agua es de \$590. Si el metro cúbico de agua potable vale \$250 y, por el uso de alcantarillado se cobra \$70 por cada metro cúbico, ¿cuál fue el consumo en m^3 sabiendo que se canceló por la cuenta \$6.990?

A) 18
B) 20
C) 21
D) 25
E) 30

12. Una industria contrata un servicio mensual de transporte, el cual aplica el siguiente gráfico en el cobro de sus tarifas, según los kilómetros recorridos



¿Cuánto debe pagar la industria al término del mes si el promedio de kilómetros recorridos en los primeros 20 días del mes fue de 20 km y en los 10 días siguientes fue de 15 km?

A) \$ 60.000
B) \$100.000
C) \$120.000
D) \$140.000
E) \$160.000

13. Un taxi por bajada de Bandera cobra \$180, lo cuál cubre los primeros 1000 m, más \$200 por kilómetro recorrido. ¿Cuál es la función que permite calcular el valor a pagar por una carrera, siendo **x** el total de kilómetros recorridos (con $x > 1$) y **f(x)** el valor total a pagar?

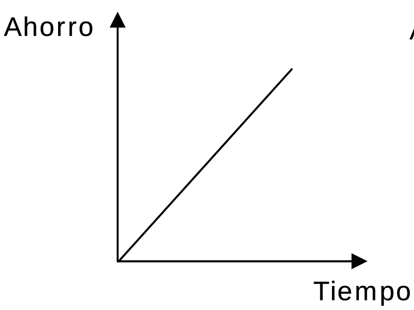
A) $f(x) = 200(x - 1) + 180$
B) $f(x) = 180(x - 1) + 200$
C) $f(x) = 200x + 180$
D) $f(x) = 180x + 200$
E) $f(x) = 200(x – 1000) + 180$

14. La siguiente tabla muestra el ahorro que posee una persona y el decrecimiento de éste originados por los gastos semanales efectuados

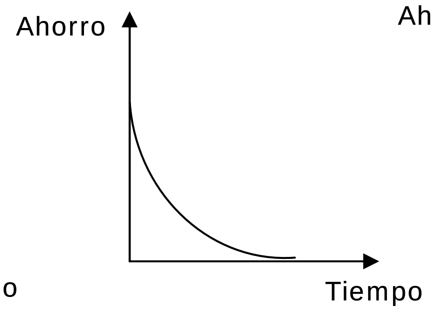
SEMANAS TRANSCURRIDAS	**AHORROS**
0	$200.000
1	$180.000
2	$160.000
3	$140.000
4	$120.000
5	$100.000

¿Cuál gráfico representa esta situación de continuar así?

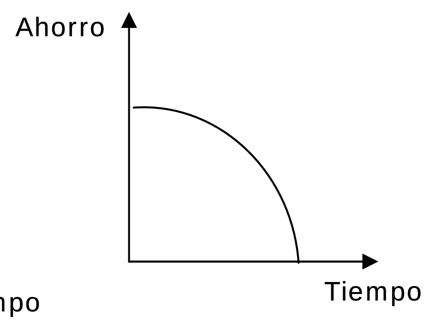
A)



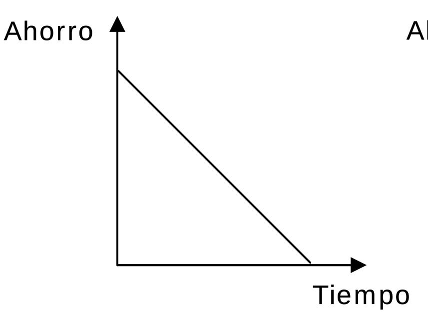
B)



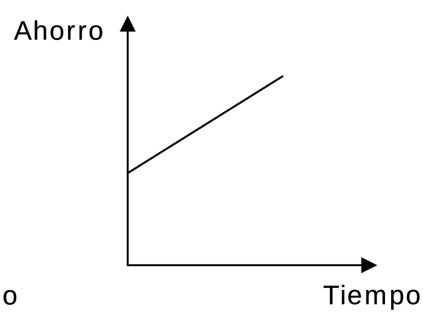
C)



D)



E)



15. En un plan de telefonía celular se pagan $26.000 por hablar 100 minutos y $40.000 por hablar 200 minutos. Si estas variables se relacionaban de manera lineal, ¿cuánto se pagaría por hablar 500 minutos?

A) $72.000
B) $82.000
C) $92.000
D) $100.000
E) $130.000

RESPUESTAS

<table>
<tr><th>Págs. \ Ejemplos</th><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td>4</td><td>D</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>B</td></tr>
<tr><td>6</td><td>D</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>C</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>E</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td></td><td><table><tr><th></th><th>Dominio</th><th>Recorrido</th></tr><tr><td>a)</td><td>IR</td><td>$\{y \in IR \ / \ y \geq -3\}$</td></tr><tr><td>b)</td><td>IR</td><td>IR_0^+</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>10</td><td>E</td><td>C</td></tr>
<tr><td>11</td><td>D</td><td>D</td></tr>
</table>

CLAVES PÁG. 12

1. C	6. A	11. B
2. C	7. B	12. D
3. E	8. B	13. A
4. D	9. B	14. D
5. E	10. D	15. B