

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

FACTORIZACIÓN Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

---

**FACTORIZAR**

Es el proceso de escribir un polinomio como producto de sus factores.

Factor Común

$$ab + ac = a \cdot (b + c)$$

---

**EJEMPLOS**

- Al factorizar  $2x^3y - 8x^2y^2 - 6xy^3$  se obtiene
  - $x(2x^2y - 8xy^2 - 6xy^3)$
  - $-6x^6y^6$
  - $2xy(x^2 - 4xy - 3y^2)$
  - $x^3y^2(2y^2 - 8xy - 8x^2)$
  - $2xy(x^2 - 6xy - 3xy)$
  
- La factorización de la expresión  $(a + b)^2 + 3(a + b)$  es
  - $(a + b)(a + b + 3)$
  - $3(a^2 + b^2)$
  - $(a + b)[3(a + b)]$
  - $(a - b)(a - b - 3)$
  - $(a - b)(a - b + 3)$
  
- Al factorizar  $(3a + b)^2 + 9a^2 - b^2$  se obtiene
  - $(3a + b)(3a - b)$
  - $(3a + b)(a - 2b)$
  - $(3a + b)(2a - b)$
  - $a(3a + b)$
  - $6a(3a + b)$

---

## POLINOMIOS DE DOS TÉRMINOS

DIFERENCIA DE CUADRADOS:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

DIFERENCIA DE CUBOS:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

SUMA DE CUBOS:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

---

## EJEMPLOS

1. Al factorizar  $16x^2 - 9y^2$  su resultado es

- A)  $(4x - 3y)(4x - 3y)$
- B)  $(8x + 3y)(8x - 3y)$
- C)  $xy(16x - 9y)$
- D)  $(4x - 3y)^2$
- E)  $(4x + 3y)(4x - 3y)$

2. La expresión  $a^3 + 1$  es equivalente con

- A)  $(a - 1)(a^2 + a + 1)$
- B)  $(a + 1)(a^2 - a + 1)$
- C)  $(a - 1)(a^2 - a - 1)$
- D)  $(a + 1)(a^2 + a + 1)$
- E)  $(a + 1)(a^2 - 2a + 1)$

3. Uno de los factores de  $8z^3 - 1$  es

- A)  $2z + 1$
- B)  $2z - 1$
- C)  $6z^3 + 1$
- D)  $z - 1$
- E)  $z + 1$

---

## POLINOMIOS CUADRÁTICOS DE TRES TÉRMINOS

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

TRINOMIO DE LA FORMA:

$$x^2 + px + q = (x + a)(x + b) \text{ con } p = a + b, \quad q = ab$$

TRINOMIO DE LA FORMA:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax + p)(ax + q)}{a} \text{ con } b = p + q, \quad ac = pq$$

---

### EJEMPLOS

1. Al factorizar  $x^2 + 6xy + 9y^2$  se obtiene

- A)  $(x^2 + 3)^2$
- B)  $(x + 3y)^2$
- C)  $(x + 6y)^2$
- D)  $(x - 3y)^2$
- E)  $(x - 4y)^2$

2. Al factorizar  $x^2 - 2x - 15$  se obtiene

- A)  $(x + 1)(x - 15)$
- B)  $(x - 5)(x - 3)$
- C)  $(x - 5)(x + 3)$
- D)  $(x + 5)(x - 3)$
- E)  $(x + 5)(x + 3)$

3. Al factorizar  $6x^2 + 7x + 2$  se obtiene

- A)  $(3x - 2)(2x - 1)$
- B)  $(3x + 2)(2x - 1)$
- C)  $(3x - 2)(2x + 1)$
- D)  $(3x + 1)(2x + 2)$
- E)  $(3x + 2)(2x + 1)$

---

## POLINOMIOS DE MÁS DE TRES TÉRMINOS

---

Son aquellos que tienen cuatro o más términos literales; éstos se deben agrupar convenientemente de manera de hacer factorizaciones parciales y llegar a una factorización final.

---

### EJEMPLOS

1. La expresión  $y^2 + 3y + 2 + 2x + xy$  es equivalente con

- A)  $(2 + y)(x + y + 1)$
- B)  $(2 + y)(y + x)$
- C)  $y(y^3 + x) \cdot 2(1 + x)$
- D)  $(y + 1)^2 + x(2 + y)$
- E)  $3y^3 + 3xy + 2$

2. Al factorizar  $z^2 - 4 + zx - 2x$  se obtiene

- A)  $(z - 2)(z + x + 2)$
- B)  $(z - 2)(z + 2)$
- C)  $z(z - 4 + x - 2)$
- D)  $z(z + x) \cdot 2(2 + x)$
- E)  $(z + 2)(z + 2 + x)$

3. La factorización de  $4 - (x - 1)^2$  es

- A)  $(3 + x)(5 - x)$
- B)  $(3 + x)(1 - x)$
- C)  $(1 + x)(1 - x)$
- D)  $(1 + x)(3 - x)$
- E) Ninguna de las anteriores

## FRACCIONES ALGEBRAICAS

---

Se llama fracción algebraica a toda expresión de la forma  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios. La variable  $x$  puede tomar cualquier valor real, siempre que no anule al denominador.

Así por ejemplos:

a)  $\frac{3x+2}{x^2-4}$ , con  $x \neq \pm 2$       b)  $\frac{-3x}{2x+6}$ , con  $x \neq -3$       c)  $\frac{x^2+2}{6x+3}$  con  $x \neq -\frac{1}{2}$

### SIMPLIFICACIÓN DE UNA FRACCIÓN ALGEBRAICA

Para ellos debemos considerar lo siguiente:

- Si el numerador y el denominador son monomios se cancelan los factores comunes.
- Si el numerador y/o denominador no son monomios se factoriza el numerador y/o el denominador y se cancelan los factores comunes.

Así por ejemplos

$$\frac{8a^3b^6}{12a^5b^2} = \frac{4 \cdot 2a^3b^2b^4}{4 \cdot 3a^2b^2a^2} = \frac{2b^4}{3a^2}$$

$$\frac{x^3+2x}{x^2+3x} = \frac{x(x^2+2)}{x(x+3)} = \frac{x^2+2}{x+3}$$

---

### EJEMPLOS

1.  $\frac{4a-4b}{2b-2a} =$

- 2
- 2
- 2a
- 2a- 2b
- 2b-2a

2.  $\frac{x^2-9}{x^2-7x+12} =$

- $\frac{-9}{-7x+12}$
- $\frac{x-3}{x-4}$
- $\frac{x-9}{x-5}$
- $\frac{x+3}{x-4}$
- $\frac{x-3}{x+4}$

---

## ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

En la adición o sustracción de fracciones algebraicas, tal como en las fracciones numéricas, pueden ocurrir dos casos:

### a) Fracciones de igual denominador

Si  $\frac{A}{B}$  y  $\frac{C}{B}$  son fracciones algebraicas, donde  $B \neq 0$ , entonces  $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$

### b) Fracciones de distinto denominador

Si  $\frac{A}{B}$  y  $\frac{C}{D}$  son fracciones algebraicas, donde  $B \neq 0$  y  $D \neq 0$ , entonces  $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D \pm B \cdot C}{B \cdot D}$

---

## EJEMPLOS

1.  $\frac{2x^2 + 5}{x + 3} + \frac{6x - 5}{x + 3} =$

- A)  $\frac{2x^2 - 6x - 10}{3 - x}$
- B)  $x - 6$
- C)  $x - 3$
- D)  $2x$
- E)  $-2x$

2.  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} =$

- A)  $\frac{a-b}{a+b}$
- B)  $\frac{a+b}{a-b}$
- C)  $\frac{a+b-2ab}{a^2 - b^2}$
- D) 1
- E) 0

---

## MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Si  $\frac{A}{B}$  y  $\frac{C}{D}$  son fracciones algebraicas, donde  $B \neq 0$  y  $D \neq 0$ , entonces:

a) La multiplicación  $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$

b) La división  $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$  ( $C \neq 0$ )

---

### EJEMPLOS

1.  $\frac{y^2 - y}{1 - y} \cdot \frac{y + 1}{y} =$

- A)  $y + 1$
- B)  $-y + 1$
- C)  $-(y + 1)$
- D)  $y^2$
- E)  $0$

2.  $\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 - b^2} : \frac{a + b}{a - b} =$

- A)  $\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2$
- B)  $\frac{a + b + 2ab}{a - b}$
- C)  $\frac{a + b}{a - b}$
- D)  $2ab$
- E)  $1$

## EJERCICIOS

- Al factorizar  $m^2 - n^2 - m - n$  se obtiene
  - $(m - n)(m^2 + n^2)$
  - $(m + n)(m - n - 1)$
  - $(m - n)(m - n - 1)$
  - $(m + n)(m - n + 1)$
  - $(m - n)(m - n + 1)$
  
- La suma entre el cuadrado del antecesor de un número  $x$  y el cuadrado de dicho número, disminuido en 1, está representado por
  - $2(x^2 - 1)$
  - $2(x - 1)^2$
  - $(x^2 - 1)2x$
  - $(x - 1)(2x + 2)$
  - $2x(x - 1)$
  
- ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es(son) factor(es) de la expresión algebraica  $x^2 - 7x + 12$ ?
  - $x - 4$
  - $x - 1$
  - $x - 3$
  - Sólo I
  - Sólo II
  - Sólo III
  - Sólo II y III
  - Sólo I y III
  
- Un globo aerostático vuela con una rapidez de  $(n + 8)\frac{\text{km}}{\text{hr}}$ . A esta rapidez, ¿cuánto tiempo, en horas, le tomará volar  $(n^2 + 5n - 24)$  km?
  - $n + 3$
  - $n - 3$
  - $(n - 3)(n + 8)^2$
  - $n + 16$
  - $n - 16$



5. Si  $p \neq 0$ , entonces  $\frac{1}{p^3} - \frac{1+p^2}{p^5} =$

A)  $\frac{2p^2 - 1}{p^5}$

B)  $-\frac{1}{p^5}$

C)  $\frac{1}{p^3}$

D) 0

E)  $\frac{1}{p^5}$

6. Al efectuar la suma  $\frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} + \frac{a}{bc}$  con  $abc \neq 0$ , se obtiene

A)  $\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}$

B)  $\frac{a+b+c}{abc}$

C)  $\frac{a+b+c}{a^2b^2c^2}$

D)  $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

E)  $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}$

7. La expresión  $1 - p^6$  es equivalente a

A)  $(1 - p^3)(1 - p^2)$

B)  $p^3(1 - p^2)$

C)  $(1 - p^3)(1 + p^3)$

D)  $(1 - p^3)^2$

E)  $(1 - p^2)^3$

8. Al dividir la fracción  $\frac{m-n}{m}$  por  $\frac{n^2-m^2}{mn}$ , con  $mn \neq 0$ , se obtiene

A)  $\frac{(m-n)(n^2-m^2)}{m^2n}$

B)  $\frac{n}{n+m}$

C)  $\frac{-n}{m+n}$

D)  $\frac{n+m}{n}$

E)  $\frac{-n-m}{n}$

9. La fracción  $\frac{x^2 - 6x + 8}{4 - x^2}$ , con  $x \neq \pm 2$ , es igual a

- A)  $-2x + 8$
- B)  $\frac{-x - 4}{x + 2}$
- C)  $\frac{x + 2}{x - 4}$
- D)  $\frac{x - 4}{x + 2}$
- E)  $\frac{4 - x}{x + 2}$

10. Si  $ab \neq 0$ , entonces  $\frac{\frac{2a}{b} - \frac{2b}{a}}{1 - \frac{a}{b}} =$

- A)  $2 - \frac{2b}{a}$
- B)  $\frac{2a + 2b}{a}$
- C)  $\frac{2a + 2b}{-a}$
- D)  $\frac{2a - 2b}{a(1 - a)}$
- E)  $\frac{-2}{a}$

11. Para  $xy \neq 0$ ,  $\frac{\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}} =$

- A)  $\frac{-x - y}{xy}$
- B)  $x + y$
- C)  $x - y$
- D)  $-x - y$
- E)  $-1$

12. Para  $x \neq \pm 5$ ,  $\frac{x+3}{x-5} - \frac{8x-40}{x^2-25} =$

A)  $\frac{x^2 - 8x - 25}{x^2 - 25}$

B)  $\frac{-7x - 37}{-x^2 + x + 20}$

C)  $\frac{x^2 + 55}{x^2 - 25}$

D)  $\frac{x+5}{x-5}$

E) 1

13. Si **a** y **b** son números enteros positivos, la expresión  $\frac{a^2 + b}{a}$  representa a un número entero si:

(1)  $a^2 + b$  es número entero.

(2)  $\frac{b}{a}$  es un número entero.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

14. El trinomio  $x^2 + nx + c$  es cuadrado de binomio si:

(1)  $c = \left(\frac{n}{2}\right)^2$

(2)  $c = \frac{1}{4}$  y  $n = -1$

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

15. Se puede determinar el valor de  $\frac{t^2 + 10}{5t}$  si:

- (1) El 20% de t es 4.  
 (2) El cuadrado de t es 400.
- A) (1) por sí sola  
 B) (2) por sí sola  
 C) Ambas juntas, (1) y (2)  
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)  
 E) Se requiere información adicional

### RESPUESTAS

Ejemplos Págs.	1	2	3
1	C	A	E
2	E	B	B
3	B	C	E
4	A	A	D
5	A	D	
6	D	A	
7	C	E	

CLAVES PÁG. 8
---------------

1. B    6. D    11. D  
 2. E    7. C    12. C  
 3. E    8. C    13. B  
 4. B    9. E    14. D  
 5. B    10. C    15. A