MATERIAL N° 012-I

GUÍA TEORICO PRÁCTICA Nº 11

UNIDAD: GEOMETRÍA

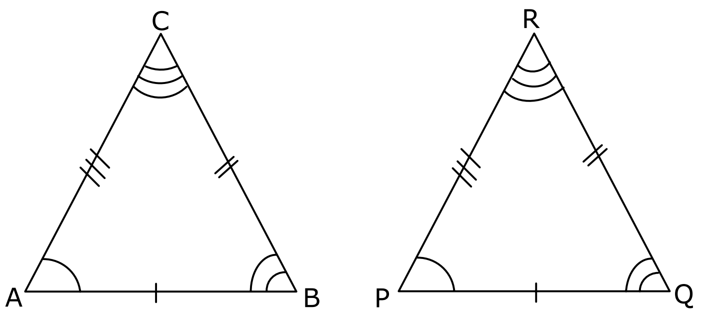
CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS Y ELEMENTOS SECUNDARIOS

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

1. DEFINICIÓN

Dos triángulos son congruentes si y sólo si existe una correspondencia entre sus vértices, de modo que **cada par de lados y ángulos correspondientes sean congruentes.**

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$
$$\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{PQ} \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \overline{CB} \cong \overline{RQ} \\ \measuredangle A \cong \measuredangle P \\ \measuredangle B \cong \measuredangle Q \\ \measuredangle C \cong \measuredangle R \end{cases}$$



EJEMPLOS

1. Los triángulos PQR y TNM de la figura 1, son escalenos. Si $\Delta PQR \cong \Delta TNM$, entonces, ¿cuál de las siguientes proposiciones es FALSA?

   A) $\overline{PQ} \cong \overline{TN}$
   B) $\overline{PR} \cong \overline{TM}$
   C) $\overline{QR} \cong \overline{NM}$
   D) $\measuredangle QRP \cong \measuredangle NMT$
   E) $\measuredangle PQR \cong \measuredangle TMN$

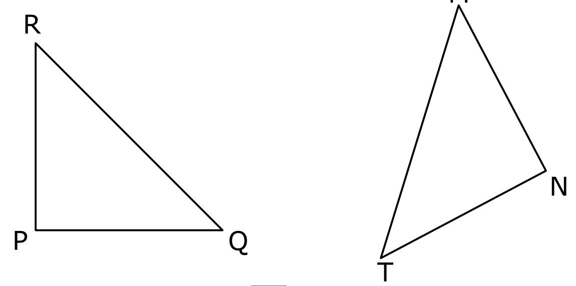


Fig. 1

2. En la figura 2, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ con $D \in \overline{BC}$, $\overline{AC} \,//\, \overline{DF}$, $\measuredangle BDE = 80º$ y $\measuredangle ACB = 40º$, ¿cuál es la medida del $\measuredangle DEF$?

   A) 40º
   B) 60º
   C) 80º
   D) 90º
   E) No se puede determinar

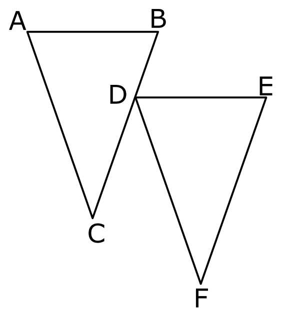


Fig. 2

POSTULADOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

P_1 ALA : Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado.

P_2 LAL : Dos triángulos son congruentes cuando tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales.

P_3 LLL : Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente iguales.

P_4 LLA > : Dos triángulos son congruentes cuando tiene dos lados y el ángulo opuesto al mayor de esos lados respectivamente iguales.

EJEMPLOS

1. En la figura 1, $\overline{DC} \perp \overline{AD}$ y $\overline{CB} \perp \overline{AB}$. Si $\measuredangle DAC \cong \measuredangle BAC$, entonces el triángulo CAB es congruente con el triángulo DCA en su orden

A) ACD
B) ADC
C) CAD
D) DCA
E) CDA

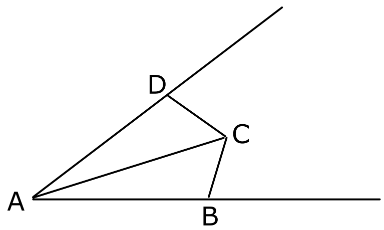


Fig. 1

2. El triángulo ABC de la figura 2, es isósceles de base $\overline{AB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AD} = \overline{DB}$. Luego, es(son) congruente(s) los siguientes pares de triángulos:

I) ΔADE con ΔBDE
II) ΔAEC con ΔBEC
III) ΔADC con ΔBDC

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II y III

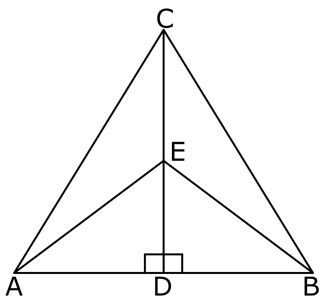
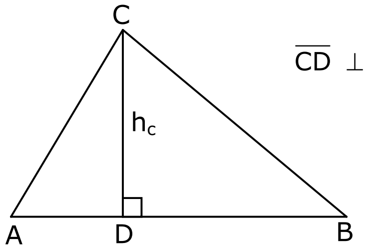


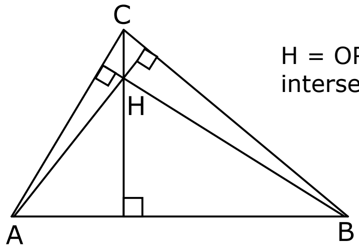
Fig. 2

1. ALTURA

Es la perpendicular que va desde el vértice al lado opuesto o a su prolongación.



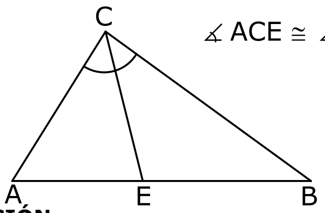
$\overline{CD} \perp \overline{AB}$



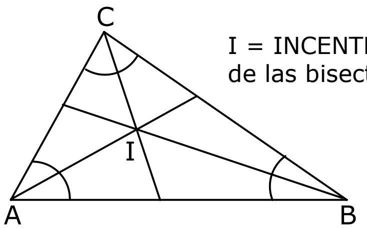
H = ORTOCENTRO (punto de intersección de las alturas)

2. BISECTRIZ

Es el trazo que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.



$\measuredangle ACE \cong \measuredangle ECB$



I = INCENTRO (punto de intersección de las bisectrices)

OBSERVACIÓN:

El punto de intersección de las bisectrices equidista de los lados del triángulo.

EJEMPLOS

1. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es FALSA?

   A) En todo triángulo acutángulo, el ortocentro queda siempre en el interior del triángulo
   B) En todo triángulo rectángulo, el ortocentro siempre coincide con el vértice del ángulo recto
   C) En todo triángulo equilátero, el ortocentro queda siempre en el interior del triángulo
   D) En todo triángulo isósceles, el ortocentro siempre queda en el interior del triángulo
   E) En todo triángulo obtusángulo, el ortocentro queda siempre en el exterior del triángulo

2. En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$ de la figura 1, I es el incentro. Si $\measuredangle AIB = 100º$, ¿cuánto mide el $\measuredangle ACB$?

   A) Faltan datos para determinarlo
   B) 20º
   C) 40º
   D) 50º
   E) 80º

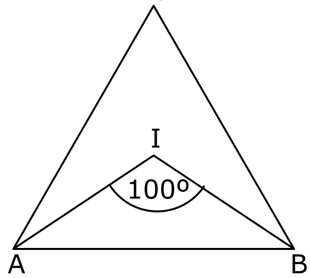
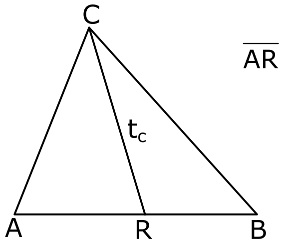


Fig. 1

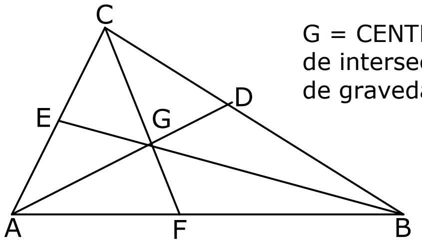
Fig. 3

3. TRANSVERSAL DE GRAVEDAD

Es el trazo que une el vértice con el punto medio del lado opuesto.



$\overline{AR} = \overline{RB}$

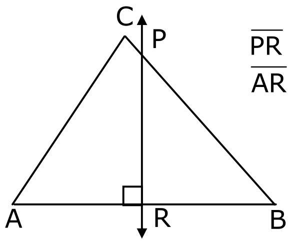


G = CENTRO DE GRAVEDAD (punto de intersección de las transversales de gravedad)

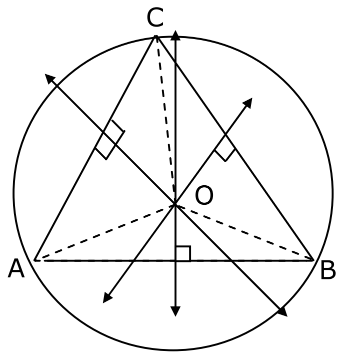
OBSERVACIÓN: Si $\triangle ABC$ rectángulo en C, entonces $\overline{CR} = \overline{AR} = \overline{RB}$.

4. SIMETRAL

Es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado del triángulo.



$\overline{PR} \perp \overline{AB}$
$\overline{AR} = \overline{RB}$



O = CIRCUNCENTRO (centro de intersección de las simetrales)

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

PROPIEDADES

El punto de intersección de las simetrales equidistan de los vértices del triángulo.

EJEMPLOS

1. En el $\triangle ABC$ de la figura 1, $\overline{CE}$ transversal de Gravedad. La medida del ángulo x es

   A) 15º
   B) 20º
   C) 25º
   D) 30º
   E) 35º

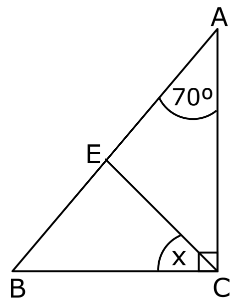


Fig. 1

2. O es el circuncentro del $\triangle ABC$ (fig. 2). Si $\measuredangle OAB = 20º$ y $\measuredangle COB = 80º$. La medida del $\measuredangle$ x es

   A) 10º
   B) 20º
   C) 50º
   D) 80º
   E) Otro valor

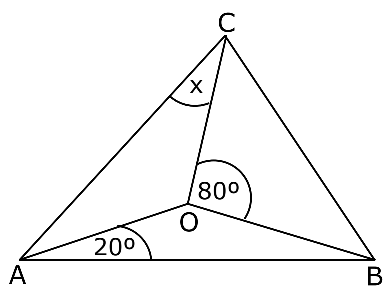
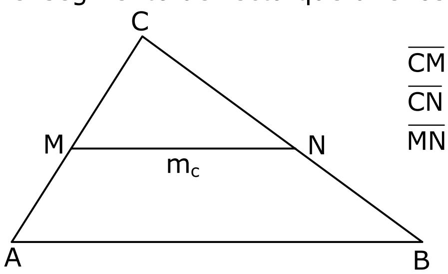


Fig. 2

MEDIANA

Es el segmento de recta que une los puntos medios de los lados del triángulo.

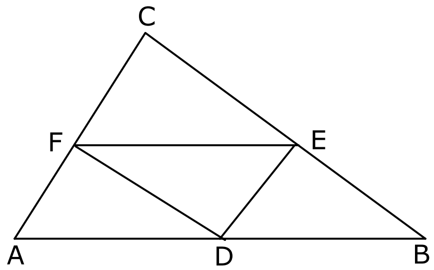


$\overline{CM} = \overline{MA}$
$\overline{CN} = \overline{NB}$
$\overline{MN} \; // \; \overline{AB}$

No existe punto de intersección de las medianas

PROPIEDADES

1. En todo triángulo al trazar las 3 medianas se forman 4 triángulos congruentes.



ΔADF $\cong$ ΔDBE $\cong$ ΔFEC $\cong$ ΔEFD

EJEMPLOS

1. En el triángulo MNT de la figura 1, $\overline{MP}$ = 8 cm, $\overline{QN}$ = 12 cm y $\overline{PQ}$ es mediana. Entonces, $\overline{MN}$ - $\overline{MT}$ es

   A) 2 cm
   B) 4 cm
   C) 6 cm
   D) 8 cm
   E) 10 cm

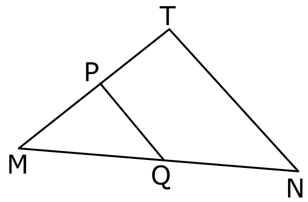


Fig. 1

2. En el triángulo PQR de la figura 2, $\measuredangle$PRQ = 80º y $\overline{DE}$ es mediana. ¿Cuánto mide $\measuredangle$x?

   A) 35º
   B) 45º
   C) 50º
   D) 55º
   E) 60º

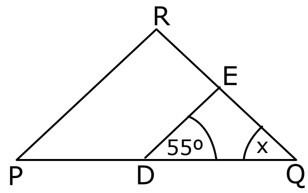
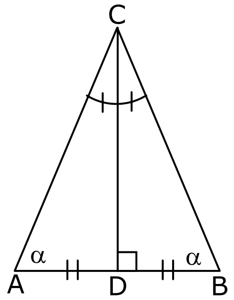


Fig. 2

Teorema 1: En todo triángulo isósceles coinciden los elementos secundarios correspondientes al lado distinto.

$\mathbf{CD = h_c = t_c = b_y = s_c}$



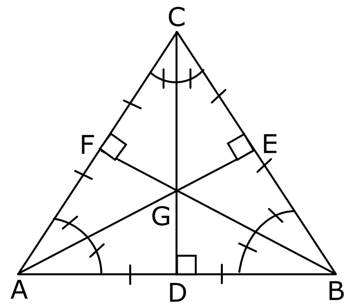
$\overline{AC} = \overline{BC}$
$\overline{AB} \neq \overline{BC}$

Teorema 2

En todo triángulo equilátero coinciden los elementos secundarios correspondientes a cualquier lado. Además, coinciden los puntos singulares.

$\mathbf{h_a = h_b = h_c}$
$\mathbf{t_a = t_b = t_c}$
$\mathbf{b_\alpha = b_\beta = b_\gamma}$
$\mathbf{S_a = S_b = S_c}$
$\mathbf{h_a = t_a = b_\alpha = S_a}$

$\{\mathbf{H}\} = \{\mathbf{G}\} = \{\mathbf{I}\} = \{\mathbf{0}\}$



EJEMPLOS

1. El triángulo DEF de la figura 1 es isósceles de base $\overline{DF}$. R es punto medio de $\overline{DF}$ y $\measuredangle$ DFE = 50º. ¿Cuánto mide el ángulo REF?

   A) 25º
   B) 30º
   C) 40º
   D) 50º
   E) 80º

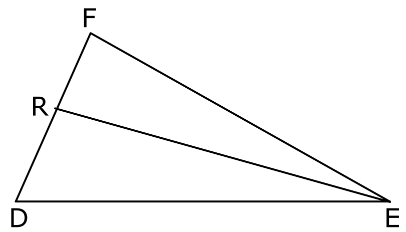


Fig. 1

2. En el triángulo equilátero ABC de la figura 2, E es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC. ¿Cuánto es el suplemento de $\measuredangle$x + $\measuredangle$y?

   A) 150º
   B) 120º
   C) 90º
   D) 60º
   E) 30º

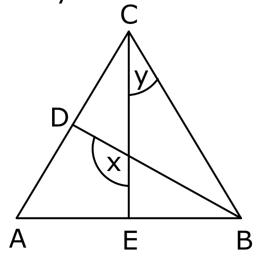


Fig. 2

EJERCICIOS

1. Considerando que la información dada en cada alternativa es acumulativa, determine en qué alternativa se puede asegurar que los triángulos de la figura 1, son congruentes.

   A) $\measuredangle CAB \cong \measuredangle FED$
   B) $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$
   C) $\overline{DF} = 5$ cm
   D) $\overline{ED} = 5$ cm
   E) $\overline{BC} = 5$ cm

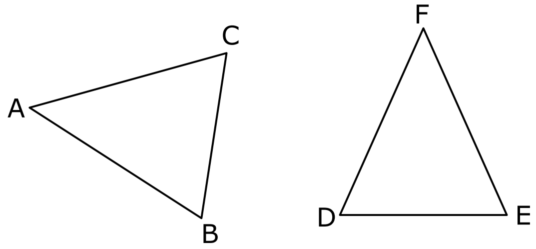


Fig. 1

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   A) Dos triángulos rectángulos que tienen un cateto respectivamente congruente, son congruentes.
   B) Si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa congruente, son congruentes.
   C) Si dos triángulos rectángulos tienen dos ángulos correspondientes congruentes, son congruentes.
   D) Si dos triángulos rectángulos tienen dos lados correspondientes congruentes, son congruentes.
   E) Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo respectivamente congruentes, son congruentes.

3. En el ΔABC de la figura 2, D, E y F son puntos medios de los lados. Entonces, el triángulo FEC es congruente al triángulo FDE en su orden

   A) FDE
   B) EFD
   C) FED
   D) EDF
   E) DEF

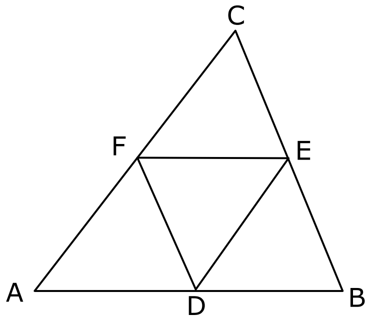


Fig. 2

4. En la figura 3, $\triangle ABC \cong \triangle MNT$, si $\measuredangle CAB = 40º$, $\measuredangle ABC = 80º$ y $\measuredangle BCA = 60º$, entonces es FALSO que

A) el lado mayor del $\triangle MNT$ es TM
B) el $\measuredangle NTM$ mide 60º
C) el $\triangle MNT$ es escaleno
D) $\overline{NT} < \overline{MN}$
E) $\overline{CA} > \overline{TM}$

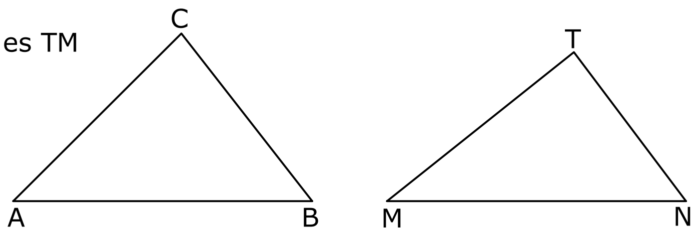


Fig. 3

5. En la figura 4, $\triangle QRP \cong \triangle DFE$. Si $\overline{QP} \cong \overline{PR}$, ¿cuánto mide el ángulo exterior HEF?

A) 62º
B) 64º
C) 74º
D) 106º
E) 116º

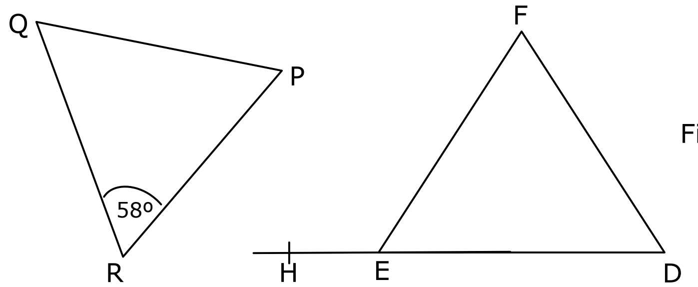


Fig. 4

6. Si en el triángulo DEF de la figura 5, $\overline{MN}$ es mediana, entonces el ángulo NMD mide

A) 40º
B) 100º
C) 120º
D) 130º
E) 140º

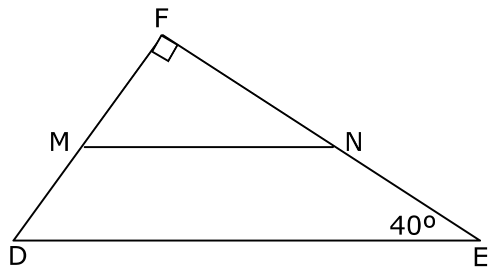


Fig. 5

7. ¿En qué triángulo al trazar cualquier bisectriz se forman dos triángulos congruentes?

A) Rectángulo isósceles
B) Isósceles acutángulo
C) Rectángulo escaleno
D) Equilátero
E) En ninguno

8. En el triángulo SRT de la figura 6, $\overline{TH}$ es altura, $\measuredangle \alpha$ = 110º y $\measuredangle \beta$ = 140º. ¿Cuál es la medida del ángulo x?

A) 20º
B) 30º
C) 50º
D) 60º
E) 70º

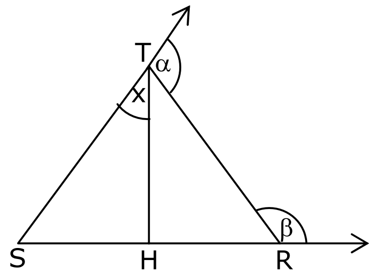


Fig. 6

9. En el triángulo ABC de la figura 7, $\overline{BD}$ es bisectriz del $\measuredangle$ABC. Si $\measuredangle$CAB = 70º y $\measuredangle$ACB = 50º, entonces ¿cuánto mide el ángulo x?

A) 30º
B) 50º
C) 60º
D) 70º
E) 100º

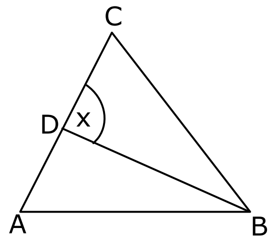


Fig. 7

10. En el triángulo ABC rectángulo en C de la figura 8, $\overline{CD}$ Transversal de Gravedad. Si $\measuredangle$CAD = 50º, entonces el ángulo DCB mide

A) 20º
B) 25º
C) 30º
D) 40º
E) 5º

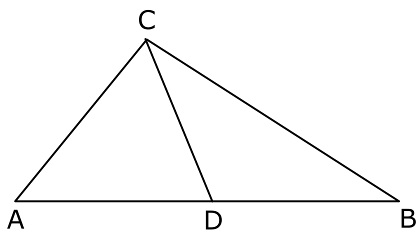


Fig. 8

11. Desde el vértice C del triángulo ABC de la figura 9, se ha trazado la altura $\overline{CD}$ y la bisectriz $\overline{CE}$ del ángulo ACB. Entonces, el $\measuredangle$DCE mide

A) 25º
B) 20º
C) 15º
D) 10º
E) 5º

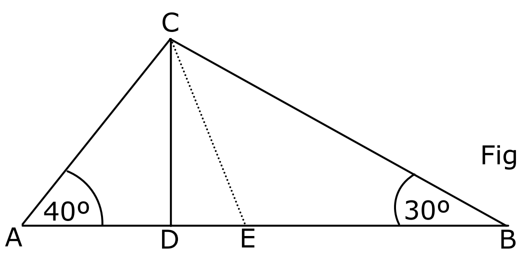


Fig. 9

12. En el triángulo LMN de la figura 10, H es el ortocentro y $\measuredangle$LMN = 66º. Luego, el $\measuredangle$LHN mide

A) 94º
B) 114º
C) 118º
D) 123º
E) 124º

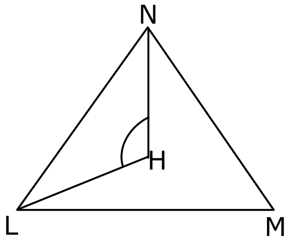


Fig. 10

13. En el ΔABC (fig. 11), $\overline{AD}$ transversal gravedad y $\measuredangle$CAD = $\measuredangle$BAD. Entonces, la medida del ángulo ADB es

A) 110º
B) 100º
C) 90º
D) 80º
E) 60º

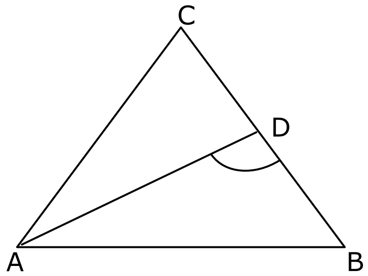


Fig. 11

14. En la figura 12, los puntos A, B y D son colineales, ΔABC $\cong$ ΔDBE, α = 36º y $\measuredangle$CBE = 20º, ¿cuánto mide el $\measuredangle$BED?

A) 20º
B) 36º
C) 64º
D) 108º
E) 116º

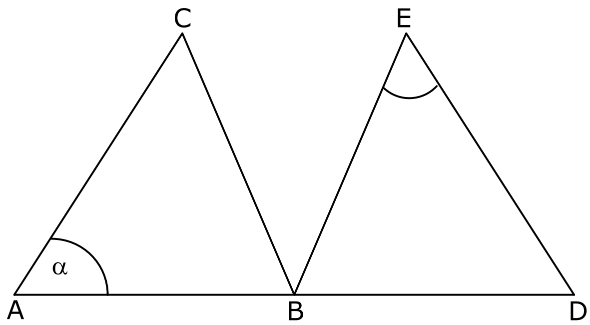


Fig. 12

15. En la figura 13, se tiene que ΔABC $\cong$ ΔDBE $\cong$ ΔDBC. Si $\measuredangle$BED = 30º, entonces ¿cuánto mide $\measuredangle$CBD?

A) 30º
B) 60º
C) 80º
D) 90º
E) 120º

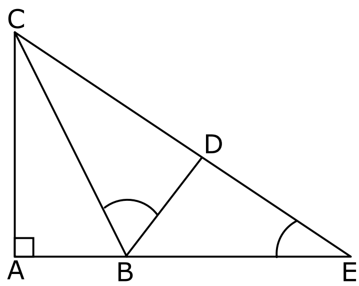


Fig. 13

16. En la figura 14, $\Delta PQR \cong \Delta PST$ y T pertenece a $\overline{RQ}$. Se puede determinar el ángulo PTR si:

(1) $\measuredangle QPS = 50^{\circ}$

(2) $\measuredangle STP = 65^{\circ}$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

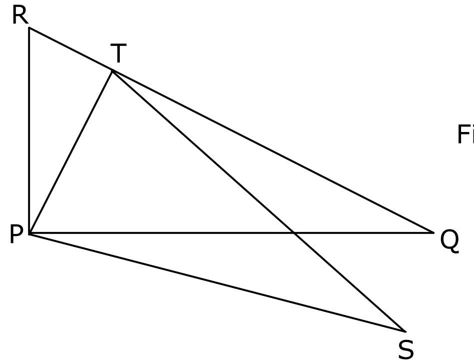


Fig. 14

17. En la figura 15, el valor de $\alpha + \delta$ se puede determinar si:

(1) $\overline{AD}$ es bisectriz.

(2) D punto medio.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

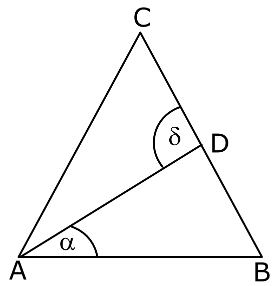


Fig. 15

18. En la figura 16, los triángulos ABC y DAE son rectángulos en A y D respectivamente y $B \in \overline{DE}$. Entonces, $\Delta ABC \cong \Delta DAE$ si:

(1) $\overline{AC} \cong \overline{DE}$

(2) $\measuredangle ACB \cong \measuredangle DEA$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

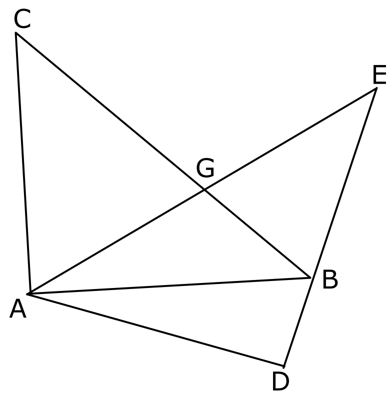


Fig. 16

19. Los triángulos ABC y BAD son congruentes figura 17, se puede determinar la medida del $\measuredangle$AEB si:

(1) $\measuredangle$BAD = 40º

(2) $\overline{CE} \cong \overline{EB} \cong \overline{DE} \cong \overline{EA}$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

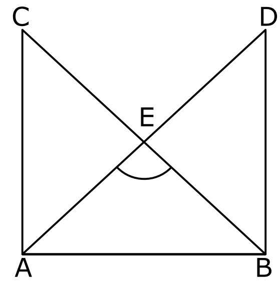


Fig. 17

20. $\triangle$ADC $\cong$ $\triangle$BEC (figura 18). El $\triangle$DEC es equilátero si:

(1) $\measuredangle$DAC = 30º

(2) $\measuredangle$ADC = 120º

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

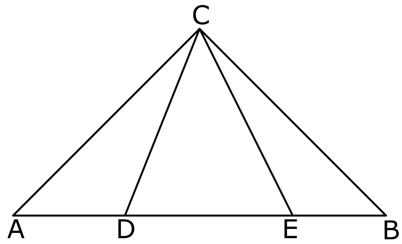


Fig. 18

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2
1	E	C
2	C	E
3	D	B
4	B	B
5	D	B
6	C	E

CLAVES PÁG. 7

1. E	6. D	11. E	16. D
2. D	7. D	12. B	17. E
3. B	8. A	13. C	18. C
4. E	9. E	14. C	19. A
5. E	10. D	15. B	20. B

DCIMA012-I