PREUNIVERSITARIO
PEDRO DE VALDIVIA

C u r s o : Matemática

Material N° 015

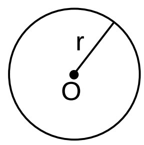
GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 12

UNIDAD: GEOMETRÍA

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA Y TEOREMAS

DEFINICIONES

CIRCUNFERENCIA: Dado un **punto O** y una **distancia r**, se llama **circunferencia** de centro **O** y radio **r** al conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia **r** del punto **O**.

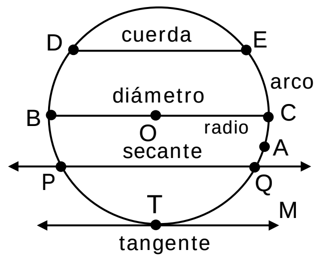


0: Centro
r: Radio
C(O,r) = ⊙(O,r)

RADIO: Trazo cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de ésta ($\overline{OC}$).

CUERDA: Trazo cuyos extremos son dos puntos de una circunferencia ($\overline{DE}$).

DIÁMETRO: Cuerda que contiene al centro de la circunferencia ($\overline{BC}$).

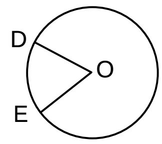


SECANTE: Recta que intersecta en dos puntos a la circunferencia ($\overleftrightarrow{PQ}$).

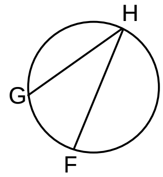
TANGENTE: Recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto ($\overleftrightarrow{TM}$). T punto de tangencia.

ARCO: Es una parte de la circunferencia determinada por dos puntos distintos de ella ($\overset{\frown}{CE}$).

ÁNGULO DEL CENTRO: Es todo ángulo interior cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son radios de la misma ($\angle$ DOE).



ÁNGULO INSCRITO: Es todo ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y parte de sus rayos son cuerdas de ésta ($\angle$ GHF).

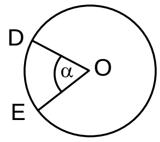


EJEMPLO

1. ¿Cuál(es) de las siguiente opciones es falsa?

   A) El diámetro de una circunferencia es el doble que la de su radio
   B) La mayor cuerda de una circunferencia es el diámetro
   C) En circunferencias congruentes los radios son congruentes
   D) Al cortarse dos cuerdas en el centro de la circunferencia forman ángulos del centro
   E) Por tres puntos cualesquiera siempre pasa una circunferencia

MEDIDA ANGULAR DE UN ARCO



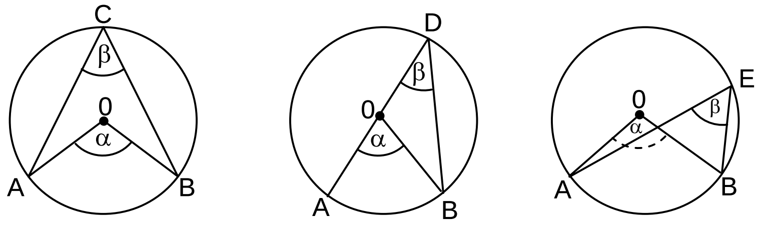
En toda circunferencia la medida angular de un arco es igual a la medida del ángulo del centro que subtiende dicho arco.

$$\boxed{\overset{\frown}{DE} = \measuredangle DOE = \alpha}$$

TEOREMA

Todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene como medida la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}\alpha}$$



O :centro de la circunferencia

EJEMPLOS

1. En la circunferencia de centro O (fig. 1), $\overline{AB}$ es diámetro. Entonces, el valor de α es

A) 10º
B) 20º
C) 40º
D) 80º
E) 140º

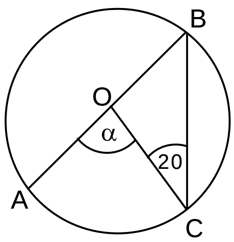


Fig. 1

2. En la circunferencia de centro O (figura 2), se cumple que $\overset{\frown}{BA} \cong \overset{\frown}{DC}$ y $\overset{\frown}{AED} + \overset{\frown}{BC} = 3\overset{\frown}{AB}$. Entonces, la medida del $\measuredangle$ x es

A) 45º
B) 60º
C) 72º
D) 84º
E) 90º

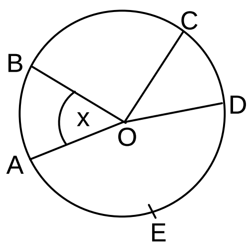
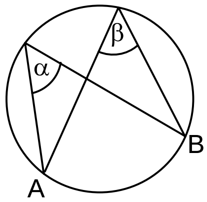


Fig. 2

TEOREMA

Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden un mismo arco tienen igual medida

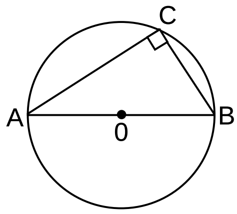
$\boxed{\alpha = \beta}$



TEOREMA

Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

$\boxed{\measuredangle\ ACB = 90º}$



O: centro de la circunferencia

EJEMPLOS

1. En el cuadrilátero inscrito en la circunferencia de la figura 1, $\alpha - \beta = 120º$. Si $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, ¿cuánto mide el ángulo x?

   A) 30º
   B) 75º
   C) 105º
   D) 150º
   E) 155º

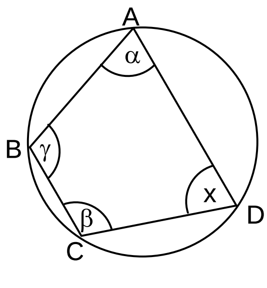


Fig. 1

2. En la circunferencia de centro O de la figura 2, $\overline{AB}$ es diámetro y $\overset{\frown}{CA} \cong \overset{\frown}{BD}$. Si $\overset{\frown}{CA} = 3m + 10$ y el $\measuredangle\ ADC = 3m - 10$, entonces $\measuredangle\ x + \measuredangle\ y =$

   A) 170º
   B) 160º
   C) 150º
   D) 140º
   E) 120º

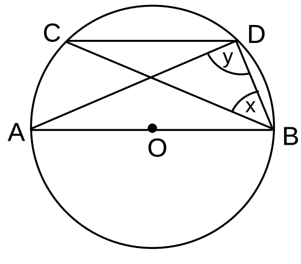
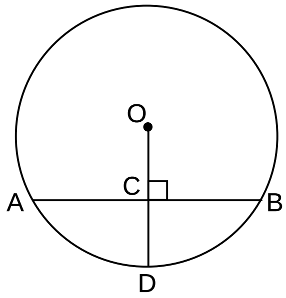


Fig. 2

TEOREMA

Si un radio de una circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces la dimidia y viceversa.



$$\boxed{\overline{OD} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} \cong \overline{CB}}$$

TEOREMA

Si un radio de una circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces dimidia al arco que subtiende la cuerda y viceversa.

$$\boxed{\overline{OD} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{DB}}$$

EJEMPLOS

1. En la circunferencia de centro O de la figura 1, $\overline{OD} \perp \overline{AB}$. Si $\overline{AC}$ = 4 cm, $\overline{OC} = \frac{3}{4}\,\overline{BC}$ y $\overline{DC} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$, entonces $\overline{OD}$ mide

A) 2 cm
B) 3 cm
C) 4 cm
D) 5 cm
E) 10 cm

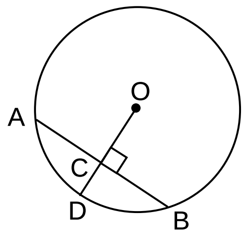


Fig. 1

2. En la circunferencia de centro O de la figura 2, $\overline{AD} = \overline{DC}$. Si $\angle CBD = 4\alpha$ y $\angle DCB = \alpha$, entonces α mide

A) 18º
B) 36º
C) 54º
D) 72º
E) No se puede determinar

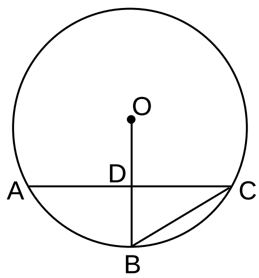
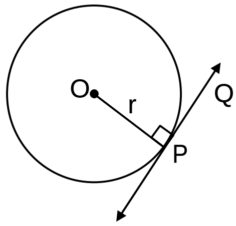


Fig. 2

TEOREMA

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

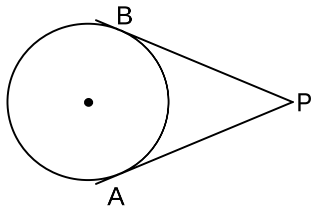
$$\boxed{\overline{QP} \text{ tangente en } P \Rightarrow \overline{QP} \perp \overline{OP}}$$



TEOREMA

Los segmentos tangentes trazados desde un punto a una circunferencia, son congruentes.

$$\boxed{\overline{PA} = \overline{PB}}$$



EJEMPLOS

1. En la figura 1, $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia de centro O y $\overline{OT}$ es radio. Si $\overline{OP}$ = 10 y $\overline{OT}$ = 5, entonces $\overline{PT}$ =

   A) $\sqrt{15}$
   B) $5\sqrt{3}$
   C) $5\sqrt{5}$
   D) 15
   E) 20

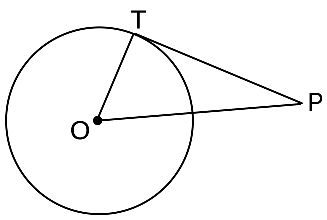


Fig. 1

2. En la figura 2, $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ son tangentes a la circunferencia de centro O, en Q y R respectivamente. Si $\measuredangle$ PQR = 6 t – 2 y $\measuredangle$ PRQ = 4t + 22, entonces la medida del ángulo QPR es

   A) 12º
   B) 40º
   C) 70º
   D) Otro valor
   E) No se puede determinar

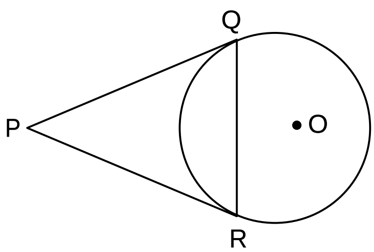


Fig. 2

3. En la figura 3, $\overleftrightarrow{DE}$ es tangente a la circunferencia de centro O, en D. ¿Cuál es el valor del $\measuredangle$ x?

   A) 36°
   B) 26°
   C) 18°
   D) 12°
   E) Falta información

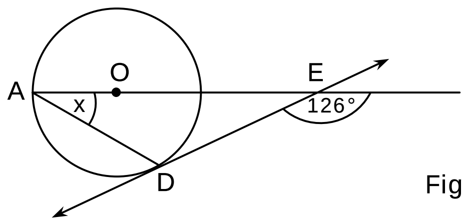


Fig. 3

EJERCICIOS

1. En la circunferencia de centro O de la figura 1, ∡ BAC + ∡ BDC = 80º. Entonces, ∡ BOC mide

   A) Falta información
   B) 80º
   C) 60º
   D) 40º
   E) 20º

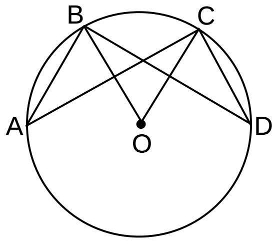


Fig. 1

2. O es centro de la circunferencia de la figura 2, y QROP es cuadrado. ¿Cuánto mide el ángulo RSP?

   A) 22,5º
   B) 30º
   C) 45º
   D) 60º
   E) 90º

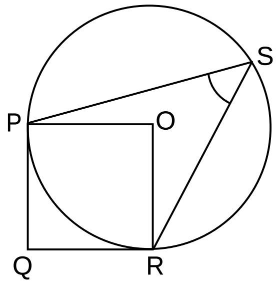


Fig. 2

3. En la circunferencia de centro O, ∡ BCD = 125º (fig. 3). Entonces, ∡ BAD mide

   A) 55º
   B) 60º
   C) 45º
   D) 65º
   E) No se puede determinar

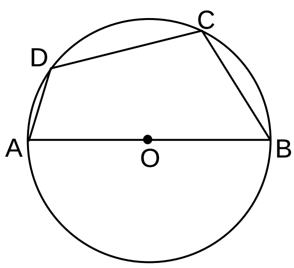


Fig. 3

4. En la circunferencia de centro O, ∡ DCB = 130º (fig. 4). Entonces, la medida del ángulo **x** es

   A) Faltan datos para determinarlo
   B) 40º
   C) 55º
   D) 65º
   E) 70º

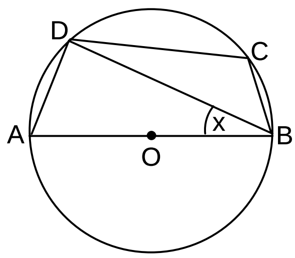


Fig. 4

5. En la circunferencia de centro O (fig. 5), $\measuredangle$ AOB = 2$\measuredangle$ ABD. ¿Cuánto mide el ángulo ACB?

A) 22,5º
B) 30º
C) 40º
D) 45º
E) 90º

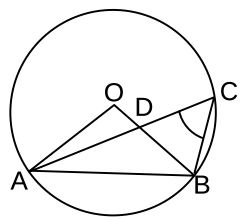


Fig. 5

6. En la circunferencia de centro O de la figura 6, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ son secantes. Si α = 80º y β = 50º, $\measuredangle$ x =

A) 65º
B) 75º
C) 90º
D) 100º
E) 130º

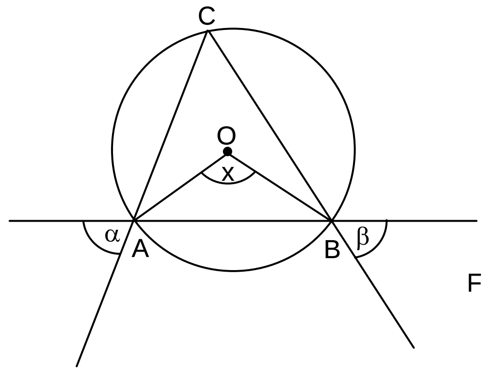


Fig. 6

7. O es centro de la circunferencia de la figura 7, $\measuredangle$ POQ = $\measuredangle$ QOR = $\measuredangle$ ROS y $\measuredangle$ RSO = 72º. ¿Cuánto mide el ángulo PTQ?

A) 54º
B) 36º
C) 35º
D) 27º
E) 18º

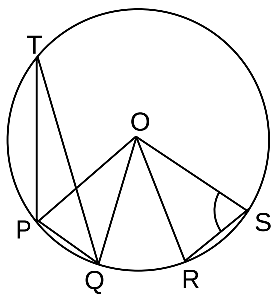


Fig. 7

8. $\overset{\frown}{BC}$ es un cuarto de circunferencia con centro en A (fig. 8). Si $\overline{BD}$ = $\overline{AB}$, entonces $\measuredangle$ DAC mide

A) 15º
B) 30º
C) 45º
D) 60º
E) 75º

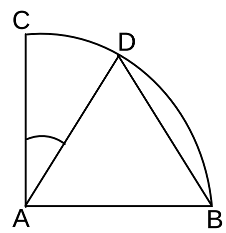


Fig. 8

9. $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ son diámetros de la circunferencia de centro O (fig. 9). Si $\angle$ AOB = 2·$\angle$ BOC, entonces el $\angle$ BDC mide

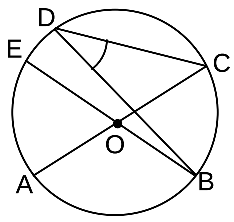


Fig. 9

A) 30º
B) 45º
C) 60º
D) 120º
E) No se puede determinar

10. En la figura 10, la circunferencia tiene centro en O. El valor del ángulo x es

A) 12,25º
B) 12,5º
C) 25º
D) 37,5º
E) 50º

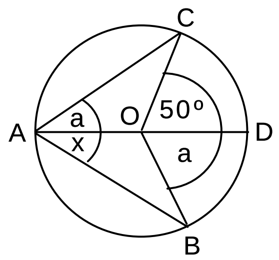


Fig. 10

11. La circunferencia de la figura 11, tiene centro en O. Si el ángulo inscrito ACB mide 20º, ¿cuál es el valor del $\angle$ ABO?

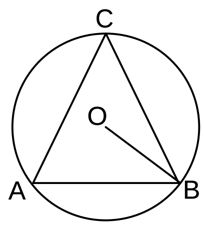


Fig. 11

A) 70º
B) 40º
C) 35º
D) 20º
E) 10º

12. En la circunferencia de centro O (fig. 12), $\overline{OD} \perp \overline{AB}$. Si $\overline{AC} = 3x + 5$ y $\overline{BC} = x + 15$, entonces $\overline{AB}$ mide

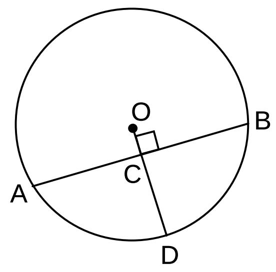


Fig. 12

A) 5
B) 10
C) 15
D) 20
E) 40

13. En la figura 13, la circunferencia de centro O está inscrita en el ΔABC, siendo D, F y E los puntos de tangencia. Si $\overline{AD}$ = 4 cm, $\overline{DB}$ = 6 cm y $\overline{CE}$ = 2 cm, entonces el perímetro del triángulo es

A) 12 cm
B) 15 cm
C) 18 cm
D) 21 cm
E) 24 cm

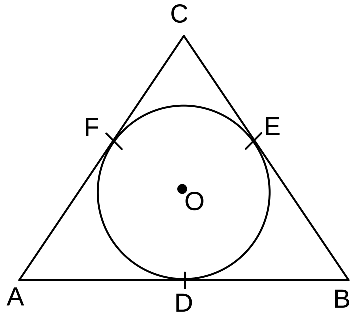


Fig. 13

14. $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia de centro O (fig. 14). La medida del $\angle$ ABC se puede determinar si:

(1) $\overline{AB} = 2\,\overline{AC}$

(2) $\angle$ COB = 2$\angle$ AOC

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

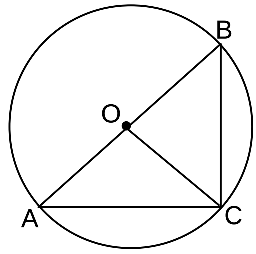


Fig. 14

15. En la circunferencia de centro O de la figura 15, $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son diámetros. Se puede conocer el valor de **x** si:

(1) $\overset{\frown}{CA}$ = 110º

(2) $\angle$ ACB + $\angle$ ADB = 70º

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

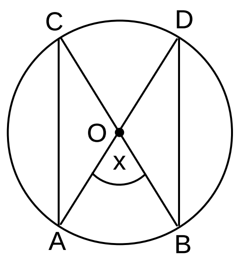


Fig. 15

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3
1	E		
2	C	C	
3	C	D	
4	D	A	
5	B	B	C

CLAVES PÁG. 6

1. B	6. D	11. A
2. C	7. E	12. E
3. A	8. B	13. E
4. B	9. A	14. D
5. D	10. B	15. D

DSEMA15