

UNIDAD: GEOMETRÍA  
**ÁNGULOS**

**CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS DE ACUERDO A SU MEDIDA**

- Ángulo nulo** : Es aquel que mide  $0^\circ$ .  
**Ángulo agudo** : Es aquel que mide más de  $0^\circ$  y menos de  $90^\circ$ .  
**Ángulo recto** : Es aquel que mide  $90^\circ$ .  
**Ángulo obtuso** : Es aquel que mide más de  $90^\circ$  y menos de  $180^\circ$ .  
**Ángulo extendido** : Es aquel que mide  $180^\circ$ .  
**Ángulo completo** : Es aquel que mide  $360^\circ$ .

**EJEMPLOS**

1. Si  $\alpha$  es un ángulo agudo, entonces el ángulo BOC de la figura 1 es

- A) agudo
- B) recto
- C) obtuso
- D) extendido
- E) completo

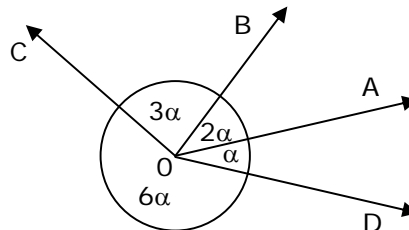


Fig. 1

2. ¿Cuál de las siguientes opciones es siempre verdadera?

- A) La suma de un ángulo agudo con un obtuso resulta extendido
- B) La mitad de un obtuso es un ángulo recto
- C) La suma de un ángulo obtuso con uno extendido resulta completo
- D) La suma de dos ángulos rectos con un extendido resulta completo
- E) La suma de dos ángulos agudos resulta un recto

3. En la figura 2,  $\alpha = 3\beta$  y  $\delta = 2\beta$ , entonces  $2\delta =$

- A)  $120^\circ$
- B)  $60^\circ$
- C)  $45^\circ$
- D)  $30^\circ$
- E)  $15^\circ$

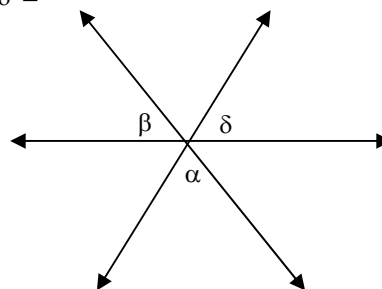
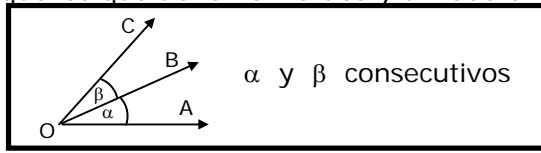


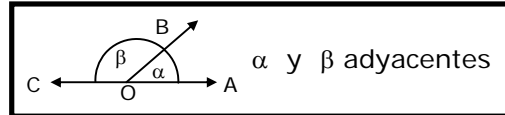
Fig. 2

**CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN**

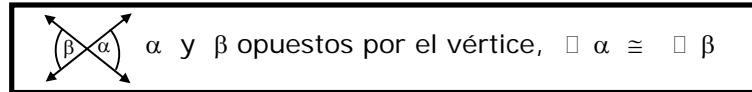
**Ángulos consecutivos** : Son aquellos que tienen el vértice y un lado en común.



**Ángulos adyacentes o par lineal** : Son aquellos que tienen el vértice y un lado en común y los otros dos lados sobre una misma recta.

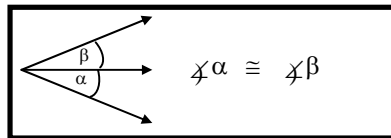


**Ángulos opuestos por el vértice** : Son aquellos que tienen el vértice en común y que los lados de uno son las prolongaciones de los lados del otro.

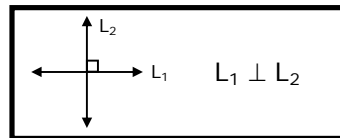


**OBSERVACIONES**

⊙ **Bisectriz de un ángulo** : Es el rayo que divide al ángulo, en dos ángulos de igual medida (congruentes).



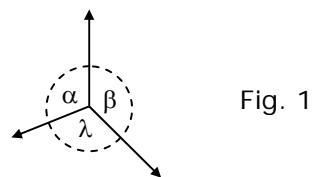
⊙ **Rectas perpendiculares** : Son dos rectas que al cortarse forman un ángulo recto.



**EJEMPLOS**

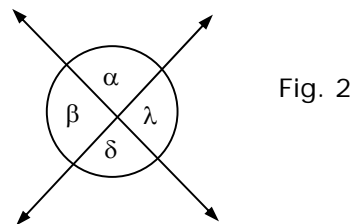
1. En la figura 1, si  $\alpha + \beta = 250^\circ$  y  $\beta + \lambda = 270^\circ$ , entonces  $\beta - \lambda =$

- A)  $110^\circ$
- B)  $90^\circ$
- C)  $70^\circ$
- D)  $50^\circ$
- E)  $30^\circ$



2. En la figura 2, se cumple que  $\alpha = \delta$  y  $\beta = \lambda$ . Entonces,  $\alpha + 4\beta + 2\lambda + 5\delta =$

- A)  $180^\circ$
- B)  $360^\circ$
- C)  $720^\circ$
- D)  $1080^\circ$
- E) Ninguna de las anteriores



---

## CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS DE ACUERDO A LA SUMA DE SUS MEDIDAS

**Ángulos complementarios** : Son dos ángulos cuyas medidas suman  $90^\circ$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  son complementarios,  $\alpha$  es el **complemento** de  $\beta$  y  $\beta$  es el complemento de  $\alpha$ . El complemento de un ángulo  $x$  es  $90^\circ - x$ .

**Ángulos suplementarios** : Son dos ángulos cuyas medidas suman  $180^\circ$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  son suplementarios,  $\alpha$  es el suplemento de  $\beta$  y  $\beta$  es el suplemento de  $\alpha$ . El **suplemento** de un ángulo  $x$  es  $180^\circ - x$

---

### EJEMPLOS

- El complemento de un ángulo  $\alpha$  es igual al doble de dicho ángulo. ¿Cuánto mide  $\alpha$ ?
  - $60^\circ$
  - $45^\circ$
  - $30^\circ$
  - $20^\circ$
  - $15^\circ$
- El complemento del suplemento de un ángulo  $\alpha$  es  $30^\circ$ . ¿Cuánto mide  $\alpha$ ?
  - $120^\circ$
  - $80^\circ$
  - $60^\circ$
  - $45^\circ$
  - $30^\circ$
- Si  $\alpha$  y  $5\beta$  son ángulos suplementarios, entonces  $\alpha$  en función de  $5\beta$  es
  - $90^\circ - 5\beta$
  - $5\beta - 90^\circ$
  - $180^\circ - 5\beta$
  - $5\beta - 180^\circ$
  - $180^\circ + 5\beta$
- Dos ángulos suplementarios son tales que el mayor excede en  $30^\circ$  a cinco veces el menor. ¿Cuál es la medida del menor de ellos?
  - $15^\circ$
  - $25^\circ$
  - $30^\circ$
  - $35^\circ$
  - $40^\circ$

**PARES DE ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL**

**ÁNGULOS ALTERNOS:**

ALTERNOS EXTERNOS	ALTERNOS INTERNOS
1 con 7	3 con 5
2 con 8	4 con 6

⊗ Los ángulos alternos entre paralelas tienen la misma medida.

**ÁNGULOS CORRESPONDIENTES**

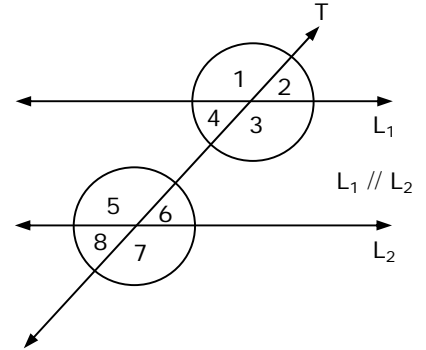
1 con 5	2 con 6	3 con 7	4 con 8
---------	---------	---------	---------

⊗ Los ángulos correspondientes entre paralelas tienen la misma medida.

**ÁNGULOS COLATERALES**

COLATERALES EXTERNOS	COLATERALES INTERNOS
1 con 8	4 con 5
2 con 7	3 con 6

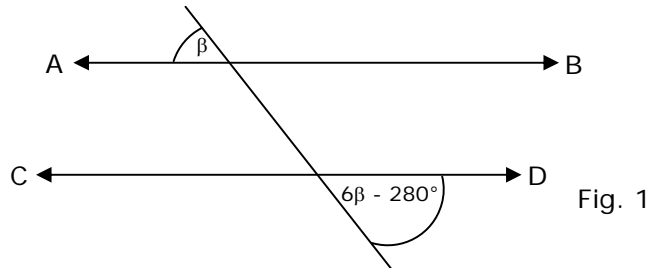
⊗ Los ángulos colaterales entre paralelas suman  $180^\circ$ .



**EJEMPLOS**

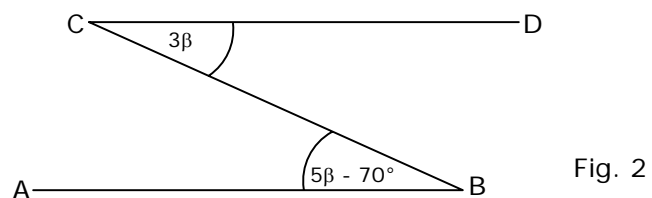
1. En la figura 1  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ . Entonces, la clasificación de  $\beta$  corresponde a un ángulo

- A) agudo
- B) recto
- C) obtuso
- D) extendido
- E) completo



2. En la figura 2,  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ . ¿Cuánto mide  $\beta$ ?

- A)  $15^\circ$
- B)  $20^\circ$
- C)  $25^\circ$
- D)  $30^\circ$
- E)  $35^\circ$



## ÁNGULOS EN TRIÁNGULOS

### TEOREMAS

- ⊙ La suma de las medidas de los ángulos interiores es igual a  $180^\circ$ .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

- ⊙ La suma de las medidas de los ángulos exteriores es igual a  $360^\circ$ .

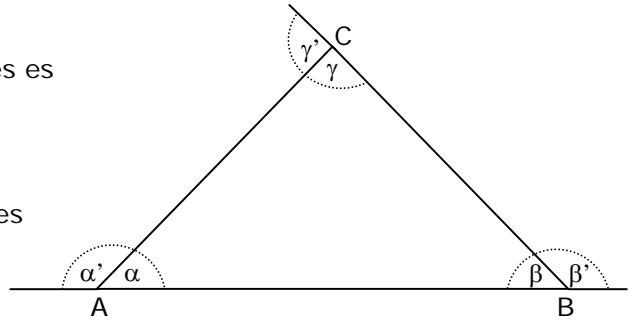
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$$

- ⊙ La medida de cada ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

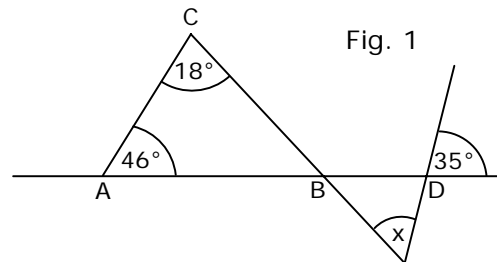
$$\gamma' = \alpha + \beta$$



### EJEMPLOS

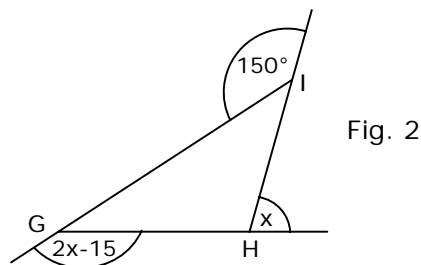
1. En el triángulo de la figura 1, el valor del ángulo  $x$  es

- A)  $19^\circ$
- B)  $23^\circ$
- C)  $29^\circ$
- D)  $58^\circ$
- E)  $116^\circ$



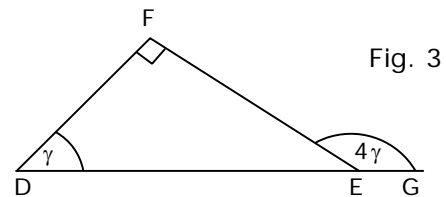
2. En el  $\triangle GHI$  de la figura 2, el valor de  $x$  es

- A)  $45^\circ$
- B)  $75^\circ$
- C)  $135^\circ$
- D)  $150^\circ$
- E)  $210^\circ$

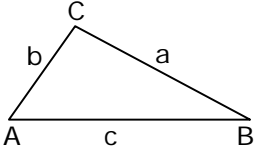
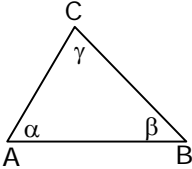
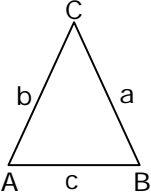
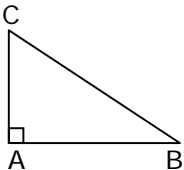
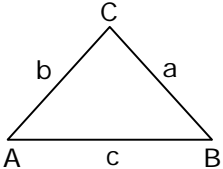
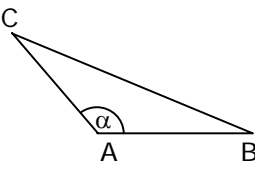


3. El valor de  $\gamma$  en el  $\triangle DEF$  de la figura 3 con  $G \in \overline{DE}$ , es

- A)  $30^\circ$
- B)  $40^\circ$
- C)  $50^\circ$
- D)  $60^\circ$
- E)  $70^\circ$



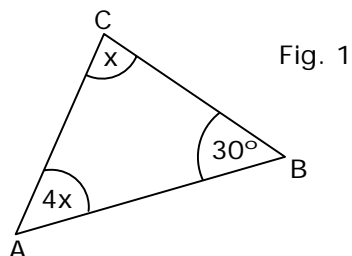
## CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Según sus lados	Según sus ángulos
<p><b>Escaleno:</b> Tiene sus tres lados de distinta medida.</p>  $a \neq b \neq c$ $a \neq c$	<p><b>Acutángulo:</b> Tiene sus tres ángulos agudos.</p>  $(\alpha, \beta, \gamma) < 90^\circ$
<p><b>Isósceles:</b> Tiene sólo dos lados de igual medida.</p>  $a = b$ $a \neq c$	<p><b>Rectángulo:</b> Tiene un ángulo recto.</p>  $\sphericalangle A = 90^\circ$
<p><b>Equilátero:</b> Tiene sus tres lados de igual medida.</p>  $a = b = c$	<p><b>Obtusángulo:</b> Tiene un ángulo obtuso.</p>  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

### EJEMPLO

1. La clasificación del triángulo de la figura 1, es

- A) escaleno y acutángulo
- B) escaleno y rectángulo
- C) isósceles y acutángulo
- D) isósceles y obtusángulo
- E) isósceles y rectángulo



**EJERCICIOS**

1. Sea  $\alpha$  un ángulo. Si el triple de  $\alpha$  es un ángulo agudo, entonces  $\alpha$  puede tomar el(los) valor(es):

- I)  $\alpha = 28^\circ$
- II)  $\alpha = 14^\circ$
- III)  $\alpha = 31^\circ$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo I y III
- D) Sólo I y II
- E) I, II y III

2. Si el triple del complemento de  $(\alpha - 30^\circ)$  es igual al suplemento de  $(\alpha - 40^\circ)$ , entonces  $\alpha$  mide

- A)  $25^\circ$
- B)  $70^\circ$
- C)  $80^\circ$
- D)  $100^\circ$
- E)  $155^\circ$

3. En la figura 1,  $L_1 \parallel L_2$ ,  $L_3 \parallel L_4$  y  $\alpha + \beta = 50^\circ$ . Entonces, el suplemento de  $\gamma$  es

- A)  $25^\circ$
- B)  $50^\circ$
- C)  $90^\circ$
- D)  $130^\circ$
- E)  $155^\circ$

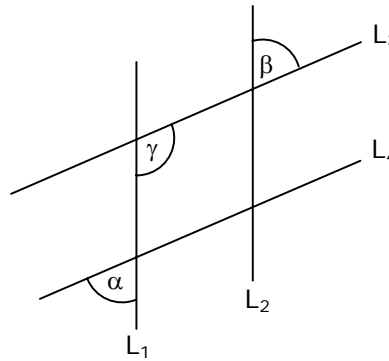


Fig. 1

4. En la figura 2,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  y  $L_4$  son rectas tales que  $L_3 \parallel L_4$  y  $L_3$  es bisectriz del ángulo obtuso formado por  $L_1$  y  $L_2$ . El valor de  $x$  es

- A)  $20^\circ$
- B)  $30^\circ$
- C)  $60^\circ$
- D)  $70^\circ$
- E)  $50^\circ$

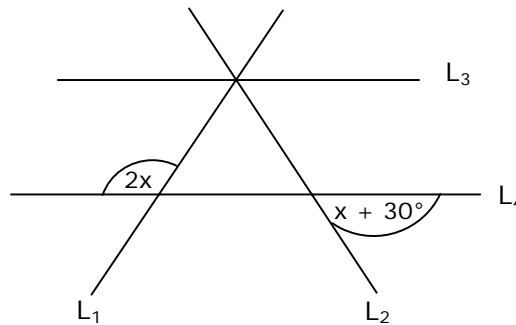


Fig. 2

5. Si el triángulo ABC de la fig. 3, es rectángulo en C, entonces el complemento del complemento del  $\square x$  mide

- A)  $22^\circ$
- B)  $36^\circ$
- C)  $44^\circ$
- D)  $46^\circ$
- E)  $34^\circ$

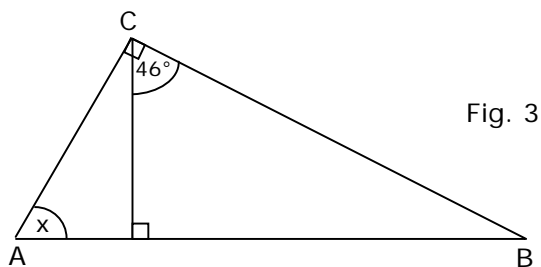


Fig. 3

6. El valor de  $\gamma$  en el  $\triangle DEF$  de la figura 4, con  $G \in \overline{DE}$ , es

- A)  $20^\circ$
- B)  $30^\circ$
- C)  $80^\circ$
- D)  $100^\circ$
- E)  $120^\circ$

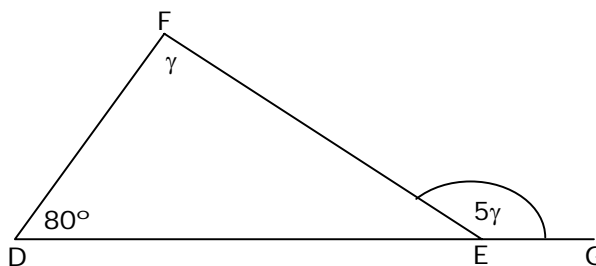


Fig. 4

7. En el triángulo ABC de la fig. 5, se traza la transversal  $\overline{DE}$ , ¿cuánto mide el ángulo x?

- A)  $63^\circ$
- B)  $70^\circ$
- C)  $117^\circ$
- D)  $103^\circ$
- E) Ninguna de las anteriores

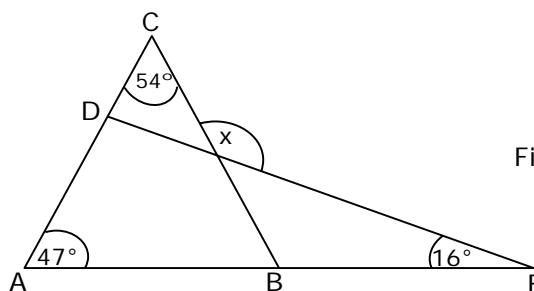


Fig. 5

8. En la figura 6,  $\square DAB = \square CBA$ . Entonces, el  $\square x$  mide

- A)  $80^\circ$
- B)  $100^\circ$
- C)  $110^\circ$
- D)  $120^\circ$
- E)  $140^\circ$

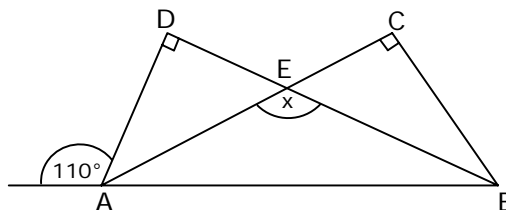


Fig. 6



9. De acuerdo a la información suministrada en la figura 7, ¿cuál es la medida del  $\square x$ ?

- A)  $110^\circ$
- B)  $120^\circ$
- C)  $150^\circ$
- D)  $160^\circ$
- E)  $170^\circ$

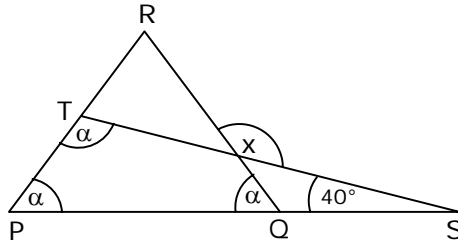


Fig. 7

10. En el triángulo de la figura 8, el ángulo  $\beta$  es igual a

- A)  $2\gamma + \alpha$
- B)  $2\gamma - \alpha$
- C)  $\gamma + \alpha$
- D)  $2\gamma$
- E)  $\gamma$

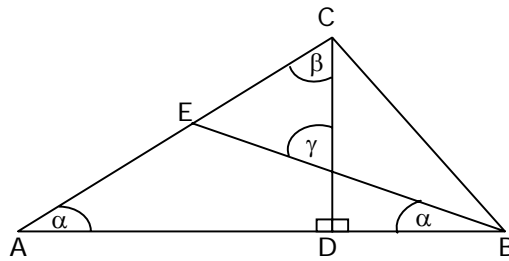


Fig. 8

11. En el triángulo ABC de la figura 9,  $\overline{AE}$  y  $\overline{CD}$  son bisectrices de los ángulos CAB y ACB respectivamente. Entonces, el ángulo  $x$  mide

- A)  $146^\circ$
- B)  $158^\circ$
- C)  $168^\circ$
- D)  $68^\circ$
- E)  $36^\circ$

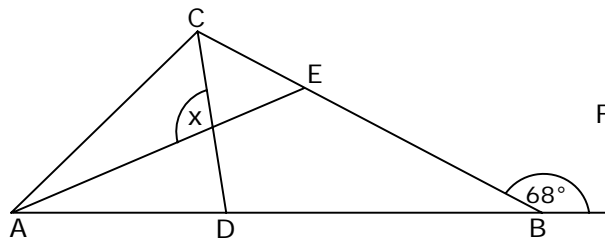


Fig. 9

12. En el triángulo ABC de la figura 10, es rectángulo en C,  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$  y  $\overline{AE}$  es bisectriz. Si  $\square AFD = 57^\circ$ , entonces la medida del  $\square ABC$  es

- A)  $24^\circ$
- B)  $26^\circ$
- C)  $28^\circ$
- D)  $34^\circ$
- E)  $57^\circ$

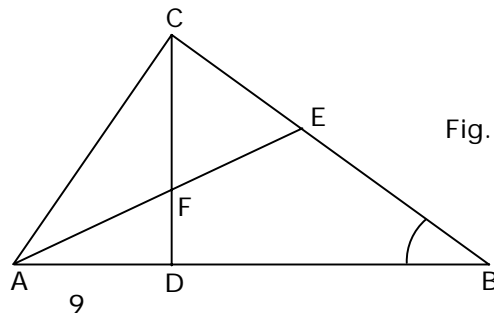


Fig. 10

13. En el triángulo ABC, un ángulo interior mide  $20^\circ$  más que el otro, pero  $35^\circ$  menos que el tercero. ¿Cuál es el complemento del menor?

- A)  $25^\circ$
- B)  $35^\circ$
- C)  $55^\circ$
- D)  $65^\circ$
- E)  $75^\circ$

14. El  $\triangle ABC$  de la figura 11 es rectángulo si:

- (1)  $\angle BAC = \angle ABC$
- (2)  $\angle AFB = 135^\circ$ ;  $\overline{AD}$  y  $\overline{BE}$  son bisectrices

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

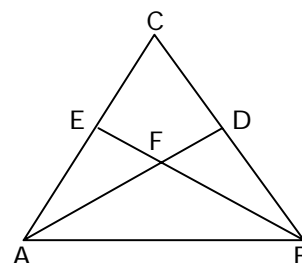


Fig. 11

15. En la figura 12, la medida del  $\angle \alpha$  se puede determinar si:

- (1)  $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$
- (2)  $7\alpha = 2\beta$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

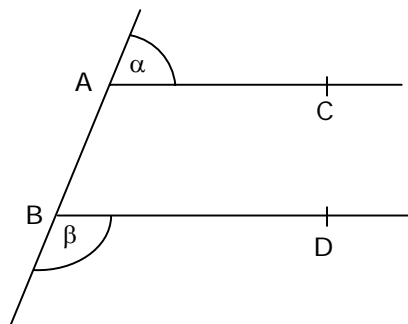


Fig. 12

## RESPUESTAS

Ejemplos Págs.	1	2	3	4
1	B	D	A	
2	D	D		
3	C	A	C	B
4	A	E		
5	C	B	A	
6	D			

### CLAVES PÁGINA 8

- |      |       |       |
|------|-------|-------|
| 1. D | 6. A  | 11. A |
| 2. B | 7. C  | 12. A |
| 3. E | 8. E  | 13. C |
| 4. E | 9. C  | 14. B |
| 5. D | 10. E | 15. C |