Curso: Matemática

PREUNIVERSITARIO PEDRO DE VALDIVIA

Material N° 14

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 11

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

ÁLGEBRA DE POLINOMIOS

EVALUACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Evaluar una expresión algebraica consiste en **sustituir** las letras por los **valores** numéricos dados para luego realizar las operaciones indicadas. Esta sustitución va siempre entre paréntesis.

TÉRMINOS SEMEJANTES

Son aquellos que tienen **idéntico factor literal**, es decir tienen las mismas letras, y los mismos exponentes, sólo pueden diferir en el coeficiente numérico.

REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Para reducir términos semejantes basta sumar o restar sus coeficientes numéricos y mantener su factor literal.

EJEMPLOS

1. Si a = -2 , b = -3 y c = 4 , entonces $ab^2 - a^3 : c =$

A) 20
B) 6,5
C) -2,5
D) -16
E) -20

2. $x - 2y + 3z - 4 - 2x + 4y - z + 3 =$

A) $-x + 2y - 2z - 1$
B) $-x - 2y + 2z - 1$
C) $-x + 2y + 2z - 1$
D) $x + 2y + 2z - 1$
E) $-x + 2y + 2z + 1$

3. $a^2b - \frac{1}{3}ab^2 - \frac{1}{4}a^2b + \frac{2}{3}ab^2 - 1 =$

A) $\frac{3}{4}ab^2 + \frac{1}{3}a^2b - 1$

B) $\frac{3}{4}a^4b^2 + \frac{1}{3}a^4b - 1$

C) $\frac{3}{4}ab^2 - \frac{1}{3}a^2b - 1$

D) $\frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{3}ab^2 - 1$

E) $-\frac{3}{4}ab^2 + \frac{1}{3}a^2b - 1$

USO DE PARÉNTESIS

En Álgebra los paréntesis se usan para agrupar términos y separar operaciones. Los paréntesis se pueden eliminar de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si un paréntesis es precedido de un **signo +**, este se puede eliminar sin variar los signos de los términos que están dentro del paréntesis.

- Si un paréntesis es precedido por un **signo –**, este se puede eliminar cambiando los signos de cada uno de los términos que están al interior del paréntesis.

- Si una expresión algebraica tiene términos agrupados entre paréntesis y ellos a su vez se encuentran dentro de otros paréntesis, se deben resolver las operaciones que anteceden a los paréntesis desde adentro hacia fuera.

EJEMPLOS

1. Elimine paréntesis y reduzca los términos semejantes: $-\left[\frac{a}{3} - \{-\frac{b}{2} - (1 - c)\} - b\right] =$

A) $-\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c + 1$

B) $-\frac{a}{3} + \frac{3}{2}b + c - 1$

C) $-\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c - 1$

D) $-\frac{a}{3} + \frac{b}{2} - c - 1$

E) $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c - 1$

2. Simplifique : $0,2a + [(3,4a - 2,5) - (2,3a - 0,7)] + 0,2 =$

A) $1,3a - 1,6$
B) $1,3a - 8,4$
C) $-1,3a + 1,6$
D) $1,3a + 1,6$
E) $-1,3a - 1,6$

3. Reduzca la siguiente expresión algebraica: $3x + 2y - \{2x - [3x - (2y - 3x) - 2x] - y\} =$

A) $5x + 5y$
B) $5x + y$
C) $-7x + 5y$
D) $7x - 5y$
E) $5x - y$

OPERATORIA ALGEBRAICA

ADICIÓN DE POLINOMIOS

Para sumar y/o restar polinomios se aplican todas las reglas de reducción de términos semejantes y uso de paréntesis.

EJEMPLOS

1. Si $A = 2x^2 + 3x + 7$ y $B = 5x^2 - 7x - 4$, entonces $-2(A + B) =$

A) $6x^2 - 20x - 20$
B) $-14x^2 - 8x - 6$
C) $-14x^2 + 8x - 6$
D) $-14x^2 - 20x - 6$
E) $-6x^2 - 20x - 20$

2. Al restar la expresión $-(1 - a)$ de $-(-a)$, se obtiene

A) 1
B) -1
C) $-2a + 1$
D) $-2a - 1$
E) $2a - 1$

3. José tiene **5a – b** estampillas. Le regala a su hermano Miguel **3a – b** y a su hermana Cristina **a + b**. ¿Con cuántas estampillas quedó José?

A) $9a - b$
B) $7a - 3b$
C) $a - 3b$
D) $a - b$
E) $3a - 3b$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

- **MONOMIO POR MONOMIO:**
  Se multiplican los coeficientes numéricos entre sí y los factores literales entre sí, usando propiedades de potencias. En el caso de multiplicar un monomio por un producto de monomios se multiplica sólo por uno de ellos.

  Es decir, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

- **MONOMIO POR POLINOMIO:**
  Se multiplica el monomio por cada término del polinomio.

  Es decir, $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

- **POLINOMIO POR POLINOMIO:**
  Se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y se reducen los términos semejantes, si los hay.

EJEMPLOS

1. $\left(\frac{2}{5}xy^2z\right)\left(\frac{25}{4}x^2y\right)(-2\ yz^{-3}) =$

   A) $-5x^{-3}y^4z^{-2}$
   B) $-5x3y^{-4}z^{-2}$
   C) $5x^{-3}y^4z^{-2}$
   D) $-5x^3y^4z^{-2}$
   E) $5x^3y^4z^{-2}$

2. $(-2ab)(a^2b - 3ab^3) =$

   A) $-2a^3b^2 - 6a^2b^4$
   B) $2a^3b^2 + 6a^2b^4$
   C) $-2a^3b^2 - 6a^2b^6$
   D) $-2a^3b^2 + 6a^2b^4$
   E) $2a^3b^2 + 6a^2b^6$

3. $(a - 1)(a^n + a^{n+1} + a^{n+2}) =$

   A) $-a^n + a^{n+3}$
   B) $a^n + a^{3n}$
   C) $a^n - 2a^{2n}$
   D) $a^n + a^{n+3}$
   E) $a^n - a^{n+3}$

PRODUCTOS NOTABLES

② **CUADRADO DE BINOMIO**

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más o menos el doble producto del primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo.

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$
$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

EJEMPLOS

1. $(1 + 2x)^2 =$

A) $1 + 4x + 2x^2$
B) $1 + 4x^2$
C) $4x + 1 + 4x^2$
D) $1 + 2x + 4x^2$
E) $1 + 2x + 2x^2$

2. $\left(3a - \frac{b}{5}\right)^2 =$

A) $9a^2 - \frac{6}{5}ab + \frac{b^2}{25}$
B) $9a^2 + \frac{6}{5}ab + \frac{b^2}{25}$
C) $9a^2 - \frac{6}{5}ab - \frac{b^2}{25}$
D) $9a^2 - \frac{6}{5}ab + \frac{b^2}{5}$
E) $9a^2 + \frac{6}{5}ab + \frac{b^2}{5}$

3. Si $(m - 3n)^2 = p + q$, entonces $(3n - m)^2 =$

A) $-p + q$
B) $p - q$
C) $-p - q$
D) $p + q$
E) Otro valor

② **SUMA POR DIFERENCIA**

El producto de la suma por la diferencia entre dos términos es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.

$$\boxed{(x + y)(x - y) = x^2 - y^2}$$

EJEMPLOS

1. $(1 - \sqrt{2})\ (1 + \sqrt{2}) =$

A) -1
B) 1
C) $2\sqrt{2}$
D) $1 - 2\sqrt{2}$
E) $1 + 2\sqrt{2}$

2. $(2x + \frac{3}{y})\ (2x - \frac{3}{y}) =$

A) $2x^2 - \frac{3}{y^2}$
B) $2x^2 - \frac{3}{y^2}$
C) $4x^2 - \frac{3}{y^2}$
D) $4x^2 - \frac{9}{y^2}$
E) $4x^2 - \frac{9}{y}$

3. En el cuadrado ABCD de lado x (figura 1), $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Si $x < 8$, entonces la diferencia positiva de las regiones no achuradas equivale a

A) $x^2 - 4$
B) $4 - x^2$
C) $4^2 - (x - 4)^2$
D) $(x - 4)^2 - 4^2$
E) $4^2 - (x + 4)^2$

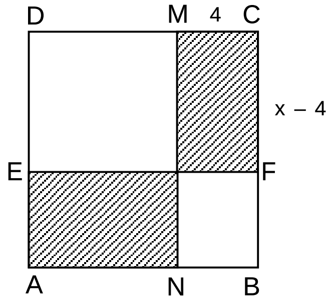

Fig. 1

② **BINOMIOS CON TÉRMINO COMÚN**

El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común, más el producto del término común con la suma algebraica de los otros dos términos, más el producto de los términos no comunes.

$$\boxed{\mathbf{(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}}$$

EJEMPLOS

1. $(x - 5)\ (x + 2) =$

A) $x^2 + 3x - 10$
B) $x^2 - 3x + 10$
C) $x^2 - 3x - 10$
D) $x^2 - 10$
E) $x^2 - 3x$

2. $(2z + 1)\left(2z - \frac{1}{2}\right) =$

A) $4z^2 + z - \frac{1}{2}$

B) $2z^2 + z - \frac{1}{2}$

C) $4z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$

D) $4z^2 + z + \frac{1}{2}$

E) $4z^2 - \frac{1}{2}$

3. $(x + 0{,}1)\ (x + 1) =$

A) $x^2 + 0{,}1$
B) $x^2 + 1{,}1x + 0{,}1$
C) $x^2 + 0{,}1x + 0{,}1$
D) $x^2 + 1{,}1x + 1{,}1$
E) $x^2 + 0{,}1x + 1{,}1$

FACTORIZACIÓN

FACTORIZAR

Es el proceso de escribir un polinomio como producto de sus factores.

② **FACTOR COMÚN** $\boxed{\mathbf{ab + ac = a \cdot (b + c)}}$

EJEMPLOS

1. Al factorizar $2x^3y - 8x^2y^2 - 6xy^3$ se obtiene

A) $x\ (2x^2y - 8xy^2 - 6xy^3)$
B) $-6x^6y^6$
C) $2xy(x^2 - 4xy - 3y^2)$
D) $x^3y^2(2y^2 - 8xy - 8x^2)$
E) $2xy(x^2 - 6xy - 3xy)$

2. La factorización de la expresión $(a + b)^2 + 3(a + b)$ es

A) $(a + b)\ (a + b + 3)$
B) $3(a^2 + b^2)$
C) $(a + b)\ [3(a + b)]$
D) $(a - b)\ (a - b - 3)$
E) $(a - b)\ (a - b + 3)$

3. Al factorizar $(3a + b)^2 + 9a^2 - b^2$ se obtiene

A) $(3a + b)\ (3a - b)$
B) $(3a + b)\ (a - 2b)$
C) $(3a + b)\ (2a - b)$
D) $a\ (3a + b)$
E) $6a\ (3a + b)$

② **DIFERENCIA DE CUADRADOS:** $\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

② **TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:** $\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

② **TRINOMIO DE LA FORMA:** $\boxed{x^2 + px + q = (x + a)(x + b) \text{ con } p = a + b, \ q = ab}$

EJEMPLOS

1. Al factorizar $16x^2 - 9y^2$ se obtiene

   A) $(4x - 3y)(4x - 3y)$
   B) $(8x + 3y)(8x - 3y)$
   C) $xy(16x - 9y)$
   D) $(4x - 3y)^2$
   E) $(4x + 3y)(4x - 3y)$

2. Al factorizar $x^2 + 6xy + 9y^2$ se obtiene

   A) $(x^2 + 3)^2$
   B) $(x + 3y)^2$
   C) $(x + 6y)^2$
   D) $(x - 3y)^2$
   E) $(x - 4y)^2$

3. Al factorizar $x^2 - 2x - 15$ se obtiene

   A) $(x + 1)(x - 15)$
   B) $(x - 5)(x - 3)$
   C) $(x - 5)(x + 3)$
   D) $(x + 5)(x - 3)$
   E) $(x + 5)(x + 3)$

FRACCIÓN ALGEBRAICA

Se llama fracción algebraica a toda expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x) y Q(x) son polinomios. La variable x puede tomar cualquier valor real, siempre que no anule al denominador.

SIMPLIFICACIÓN DE UNA FRACCIÓN ALGEBRAICA

Para ello se debe considerar lo siguiente:

- Si el numerador y el denominador son monomios, se cancelan los factores comunes.
- Si el numerador y/o denominador no son monomios, se factoriza el numerador y/o el denominador y se cancelan los factores comunes.

EJEMPLOS

1. $\frac{4a - 4b}{2b - 2a} =$

A) -2
B) 2
C) 2a
D) 2a – 2b
E) 2b – 2a

2. $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12} =$

A) $\frac{-9}{-7x + 12}$
B) $\frac{x - 3}{x - 4}$
C) $\frac{x - 9}{x - 5}$
D) $\frac{x + 3}{x - 4}$
E) $\frac{x - 3}{x + 4}$

3. $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 7x + 10} =$

A) $\frac{x - 5}{x + 2}$
B) $\frac{x + 5}{x - 2}$
C) $\frac{x - 5}{x - 2}$
D) $\frac{x + 5}{x + 2}$
E) $\frac{-10x + 5}{-7x + 2}$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

En la adición o sustracción de fracciones algebraicas, tal como en las fracciones numéricas, pueden ocurrir dos casos:

- **Fracciones de igual denominador**

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{B}$ son fracciones algebraicas, donde $B \neq 0$, entonces $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$

- **Fracciones de distinto denominador**

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son fracciones algebraicas, donde $B \neq 0$ y $D \neq 0$, entonces $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D \pm B \cdot C}{B \cdot D}$

EJEMPLOS

1. $\dfrac{2x^2 + 5}{x + 3} + \dfrac{6x - 5}{x + 3} =$

A) $\dfrac{2x^2 - 6x - 10}{3 - x}$
B) $x - 6$
C) $x - 3$
D) $2x$
E) $-2x$

2. $\dfrac{1 - \dfrac{a + b}{a - b}}{1 + \dfrac{a + b}{a - b}}$

A) $\dfrac{a}{b}$
B) $-\dfrac{b}{a}$
C) 0
D) $\dfrac{b}{a}$
E) $-\dfrac{a}{b}$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son fracciones algebraicas, donde $B \neq 0$ y $D \neq 0$, entonces:

- La multiplicación $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$
- La división $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$ $(C \neq 0)$

EJEMPLOS

1. $\frac{y^2 - y}{1 - y} \cdot \frac{y + 1}{y} =$

A) $y + 1$
B) $-y + 1$
C) $-(y + 1)$
D) y^2
E) 0

2. $\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 - b^2} : \frac{a + b}{a - b} =$

A) $\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2$
B) $\frac{a + b + 2ab}{a - b}$
C) C) $\frac{a + b}{a - b}$
D) 2ab
E) 1

EJERCICIOS

1. Al escribir en lenguaje algebraico la diferencia entre el triple de **a** y el cuadrado de **b** resulta

A) $3a - b^2$
B) $3(a - b^2)$
C) $(3a - b)^2$
D) $b^2 - 3a$
E) $a^3 - b^2$

2. Si $u = -\left(\frac{1}{2}a + 2\right)^2$ y $v = \left(-\frac{1}{2}a + 2\right)^2$, entonces $u + v =$

A) $-\frac{1}{2}$
B) $-2a$
C) $-4a$
D) 8
E) 0

3. Al multiplicar $\left(4x + \frac{1}{2}y\right)\left(4x - \frac{1}{4}y\right)$ el coeficiente del término **xy** es

A) $\frac{1}{2}$
B) 1
C) $-\frac{1}{2}$
D) -1
E) $-\frac{1}{8}$

4. Si el área de un rectángulo es $\mathbf{a^2 + ab}$ y su ancho es **a**, entonces el largo es

A) $a^2 + b$
B) $2a + b$
C) $a + b$
D) b
E) $a - b$

5. Un jardinero desea poner pasto en una cancha de fútbol de $\mathbf{a^2 - 1}$ metros de largo y **b** metros de ancho, con palmetas de césped de $\mathbf{a - 1}$ metros de largo y 0,5 metros de ancho. ¿Cuántas palmetas de césped necesita?

A) $2ab + 2b$
B) $2ab + 2$
C) $2ab$
D) $\frac{ab}{2}$
E) $\frac{1}{ab + b}$

6. Carlos tiene tres años más que Martín y Jorge tiene el cuadrado de la suma de las edades de Carlos y Martín. Si la edad de este último es **x**, entonces la edad de Jorge en función de la edad de Martín es

A) $4x^2 + 12x - 9$
B) $4x^2 - 12x + 9$
C) $4x^2 - 12x - 9$
D) $4x^2 + 12x + 9$
E) $4x^2 + 9$

7. Al factorizar $m^2 - n^2 - m - n$ se obtiene

A) $(m - n)(m^2 + n^2)$
B) $(m + n)(m - n - 1)$
C) $(m - n)(m - n - 1)$
D) $(m + n)(m - n + 1)$
E) $(m - n)(m - n + 1)$

8. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es(son) factor(es) de la expresión algebraica $x^2 - 7x + 12$?

I) $x - 4$
II) $x - 1$
III) $x - 3$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo II y III
E) Sólo I y III

9. Si $p \neq 0$, entonces $\frac{1}{p^3} - \frac{1+p^2}{p^5} =$

A) $\frac{2p^2 - 1}{p^5}$
B) $-\frac{1}{p^5}$
C) $\frac{1}{p^3}$
D) 0
E) $\frac{1}{p^5}$

10. Al efectuar la suma $\frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} + \frac{a}{bc}$ con $abc \neq 0$, se obtiene

A) $\frac{a + b + c}{ab + ac + bc}$

B) $\frac{a + b + c}{abc}$

C) $\frac{a + b + c}{a^2b^2c^2}$

D) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

E) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2}$

11. La fracción $\frac{x^2 - 6x + 8}{4 - x^2}$, con $x \neq \pm 2$, es igual a

A) $-2x + 8$

B) $\frac{-x - 4}{x + 2}$

C) $\frac{x + 2}{x - 4}$

D) $\frac{x - 4}{x + 2}$

E) $\frac{4 - x}{x + 2}$

12. $\dfrac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - 1} =$

A) $\frac{a + b}{ab^2}$

B) $\frac{a + b}{a}$

C) $\frac{a - b}{a}$

D) $\frac{b}{a}$

E) 1

13. En la expresión $x = b^2 - c$, si **b** se incrementa en **c**, entonces la variación que experimenta **x** es

A) c^2
B) $bc + c^2$
C) $c^2 + 2bc$
D) $b^2 + c^2 - c$
E) $b^2 + 2bc + c^2 - c$

14. ¿Cuál es el valor de $a^2 - b^2$?

(1) El 50% de (a + b) es 40.

(2) El 25% de (a – b) es 5.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

15. ¿Cuál es el valor de $3a - 5b - 3$?

(1) $3a = 5b$

(2) $a = -3$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3
1	D	C	D
2	C	A	B
3	C	A	D
4	D	D	A
5	C	A	D
6	A	D	D
7	C	A	B
8	C	A	E
9	E	B	C
10	A	D	C
11	D	B	
12	C	E	

CLAVES PÁG. 13

1	A	6	D	11	E
2	C	7	B	12	B
3	B	8	E	13	C
4	C	9	B	14	C
5	A	10	D	15	A

DSEMA14