Material TRM03

TALLER DE REFORZAMIENTO Nº 3

NÚMEROS DECIMALES – IRRACIONALES - REALES

NÚMEROS RACIONALES EN SU EXPRESIÓN DECIMAL

Un **número decimal** es un número en que cada dígito, según su posición, indica la cantidad de unidades, decenas, décimas, centésimas, milésimas, etc., que contiene. Con una **coma** se separa la parte entera de la parte no entera del número.

Ej. $125{,}671 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$
= 1 centena + 2 decenas + 5 unidades + 6 décimas + 7 centésimas + 1 milésima

Este número se lee: ciento veinticinco enteros, seiscientos sesenta y un milésimos

FRACCIÓN DECIMAL

Es una fracción cuyo denominador es una potencia entera de 10.

Ej. $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{179}{100}$ son fracciones decimales

La fracción $\frac{5}{8}$ se puede representar como fracción decimal, ya que

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000}$$

La fracción $\frac{2}{3}$ no puede ser representado por una fracción decimal, puesto que ninguna potencia entera de 10 es divisible por 3.

FRACCIÓN DECIMAL COMO NÚMERO DECIMAL

Toda fracción decimal se puede expresar como número decimal y vice-versa.

Ej.

Forma fraccionaria	Forma decimal	Se lee
$\frac{3}{10}$	0,3	tres décimos
$\frac{15}{1000}$	0,015	quince milésimos
$\frac{532}{100}$	5,32	cinco enteros, treinta y dos centésimos

EJERCICIOS DE DESARROLLO

A) Completa la siguiente tabla

Se lee	En forma de fracción	En forma de número decimal
5 milésimos		
1.204 diez milésimos		
125 centésimos		
20 entero, 2 décimos		

B) Encierra en un círculo las fracciones que no tienen representación decimal.

a) $\frac{51}{125}$ c) $\frac{24}{29}$ e) $\frac{13}{16}$

b) $\frac{3}{17}$ d) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{7}{15}$

FRACCIÓN A NÚMERO DECIMAL Y VICE-VERSA

Las fracciones que no pueden ser representadas como una fracción decimal, sólo podrán transformarse a número decimal **dividiendo** el **numerador** por el **denominador**. Esto se cumple para cualquiera fracción.

Al dividir el numerador por el denominador, se tiene:

Decimales finitos: son aquellos que tienen una cantidad determinada de cifras en la parte decimal.

Ej. $\frac{3}{4} \rightarrow 3 : 4 = 0{,}75$

Todo decimal finito se puede llevar a fracción. Para ello se anota en el numerador el número sin coma, y en el denominador un uno con tantos ceros como cifras haya en la parte decimal.

Ejemplos: $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

EJERCICIOS

Transforma a fracción los siguientes decimales.

a) $0,5 =$ b) $0,12 =$ c) $0,004 =$

d) $1,5 =$ e) $10,02 =$ f) $5,025 =$

Decimales infinitos periódicos puros: son aquellos que en su parte decimal tienen una o más cifras que se repiten indefinidamente. La cifra o el grupo de cifras que se repite se llama **período**.

Ejemplos: $0,3333... = 0,\overline{3}$

$0,171717... = 0,\overline{17}$

Todo decimal periódico puede representarse como una fracción. Para llevarlo a forma de fracción, en el numerador se anota el período y en el denominador tantos 9 como cifras tenga el período.

Ejemplos: $0,333... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$0,171717... = \frac{17}{99}$

Si además del período aparece parte entera, en el numerador se anota el número sin coma y se le resta la parte entera y en el denominador tantos 9 como cifras tenga el período.

Ej. $2,333... = 2,\overline{3} = \frac{23 - 2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

EJERCICIOS

Transforma los siguientes decimales periódicos a fracción.

a) $0,555... =$ b) $0,121212... =$ c) $0,010101... =$

d) $2,111... =$ e) $1,555... =$ f) $3,888... =$

Decimales infinitos semiperiódicos: son aquellos que en su parte decimal además del período tienen una o más cifras que no se repiten (anteperíodo).

Ejemplos: $0{,}2333\ldots = 0{,}2\overline{3}$

$0{,}12343434\ldots = 0{,}12\overline{34}$

Todo decimal semiperiódico se puede llevar a fracción. Para ello en el numerador se anota el número sin coma menos el anteperíodo, y en le denominador se anotan tantos 9 como cifras tenga el período y tantos ceros como cifras tenga el **anteperíodo**.

Ejemplos: $0{,}2333\ldots = 0{,}2\overline{3} = \dfrac{23 - 2}{90} = \dfrac{21}{90} = \dfrac{7}{30}$

$4{,}2333\ldots = 4{,}2\overline{3} = \dfrac{423 - 42}{90} = \dfrac{381}{90}$

EJERCICIOS

Transforma a fracciones los siguientes decimales semiperiódicos.

a) 0,1444... b) 0,4222... c) 0,23555...

d) 0,32454545... e) 0,0333... f) 21,3444...

ORDEN EN LOS DECIMALES

Si queremos comparar los decimales 35,678 y 35,876 , comparamos primeramente las partes enteras. Si estas resultan ser iguales, entonces comparamos las partes decimales, empezando por las décimas, si estas son iguales, pasamos a las centésimas, si estas resultan ser iguales, pasamos a las milésimas y así sucesivamente, hasta lograr establecer la diferencia en alguna de sus partes. En el caso del ejemplo anterior, la décima del primer decimal resulta ser inferior (6) a la décima del segundo decimal (8), por lo tanto $35{,}678 < 35{,}876$

EJERCICIO

Ordena de mayor a menor, los siguientes decimales:

$a = 235{,}571$
$b = 235{,}5\overline{71}$
$c = 235{,}\overline{571}$
$d = 235{,}57\overline{1}$

OPERATORIA ENTRE DECIMALES

Para **sumar** o **restar** decimales estos deben ser ordenados de acuerdo a la coma.

Ej.
$$\begin{array}{r} 12{,}356 \\ +\ 103{,}54 \\ \hline 115{,}896 \end{array}$$

$\therefore$ 12,356 + 103,54 =115,896

Para **multiplicar** decimales, estos se multiplican igual como si fueran enteros, y en el resultado final se corre la coma, de derecha a izquierda, tantos lugares como cifras decimales hayan en los dos números que se multiplicaron.

Ej.
$$\begin{array}{l} \underline{2{,}35} \cdot 1{,}2 \\ \ \ 470 \\ \underline{235\ \ } \\ 2{,}820 \end{array}$$
, (la coma se corre 3 lugares hacia la izquierda)

$\therefore$ 2,35 · 1,2 = 2,82

Para **dividir** decimales, estos se deben amplificar por una potencia de 10, para que el divisor sea entero. Es decir, se suprime la coma del divisor y se desplaza la coma del dividendo tanto lugares a la derecha como cifras decimales tenga el divisor. Si es necesario se agregan ceros al dividendo.

Ej. 4,6 : 0,23 (se amplifica por 100)

$$\begin{array}{l} 460 : 23 = 20 \\ \ \ 00 \\ \ \ \ 0 \end{array}$$

$\therefore$ 4,6 : 0,23 = 20

OBSERVACIÓN

Los decimales periódicos y semiperiódicos en general deben ser transformados en fracciones antes de operar. **No** es recomendable operar en la forma decimal.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

A) Resuelve las siguientes operaciones.

a)	$2,4 + 3,5 =$	b)	$124,3 - 23,85 =$	c)	$1,2 - 3,4 + 4,5 =$
d)	$2,3 \cdot 5,6$	e)	$12,3 \cdot 0,52 =$	f)	$101,1 \cdot 0,11 =$
g)	$1,2 : 0,6 =$	h)	$18 : 20 =$	i)	$12,3 : 0,25 =$

B) Resuelve los siguientes problemas

1) 1340 gramos a ¿cuántos kilos equivalen?

2) En promedio los alumnos de un curso pesan 40,3 kg, ¿cuánto pesará todo el curso si hay 30 alumnos?

3) La señora Juana que no sabe de decimales le consulta al vendedor que significa que los paquetes de margarina sean de 0,125 kg. Si el vendedor debe decírselo con fracción, ¿cómo debe responderle a la señora Juana?

4) Una barra de chocolate se debe repartir entre 5 niños. ¿Qué parte le corresponde a cada uno expresado como número decimal?

APROXIMACIONES

Al operar con números decimales periódicos o irracionales no se pueden considerar todas sus cifras. Es necesario tomar **aproximaciones**, considerando sólo un número finito de cifras decimales. Estas aproximaciones son: **Redondeo** y **Truncamiento**.
Para **redondear** un número decimal hasta un orden **n** se ponen las cifras anteriores a ese orden. La cifra de orden **n** se deja como está si la cifra siguiente es menor que 5, y se aumenta una unidad si la cifra siguiente es mayor o igual que 5.

Ejemplo: El número 5,6921 redondeado al orden de las centésimas es 5,69 y redondeado al orden de las décimas es 5,7.

Para **truncar** un número decimal hasta un orden n se ponen las cifras anteriores a ese orden inclusive, eliminando las demás.

Ejemplo: El número 3,0678 truncado al orden de las décimas es 3,0.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

1.

Número	Orden de Aproximación	Redondeo	Truncado
0,5732	Décimas		
3,648	Centésimas		
23,4321	Milésimas		
0,076487	Diez Milésimas		
1,2983	Centésimas		
4,5382	Milésimas		

2. El área de un rectángulo está dada por la fórmula A = largo · ancho. Si se aproximaran a la décima, por redondeo, las medidas de los lados del rectángulo de la figura 1, ¿cuál sería su área?

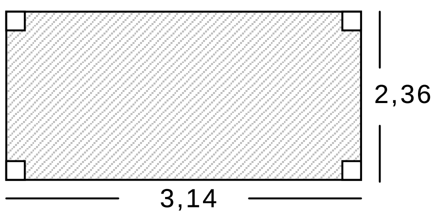

fig. 1

1. El área del triángulo esta dada por la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Si $b = 7{,}42$ y $h = 3{,}5$, ¿cuál sería el área del triángulo al aproximar por truncamiento a la décima?

2. El número $1{,}\overline{376}$ redondeado a la diez milésima es

3. El número $2{,}\overline{105}$ truncado a la centésima es

4. Si $e = 2{,}72$, entonces $33 \cdot e$, aproximado por redondeo a la décima, resulta

---

POTENCIAS DE 10

$10^0 = 1$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
$10^1 = 10$	$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$
$10^2 = 10$	$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$
$\vdots$	$\vdots$
$10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{n ceros}}$	$10^{-n} = \frac{1}{1\underbrace{00\ldots0}_{\text{n ceros}}} = \underbrace{0{,}00\ldots0}_{\text{n ceros}}1$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número está escrito en **notación científica** si tiene la forma $\mathbf{k \cdot 10^n}$, con $\mathbf{1 \leq k < 10}$ y $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos: $0{,}00527 = 5{,}27 \cdot 10^{-3}$ $527.000 = 5{,}27 \cdot 10^{5}$

NOTACIÓN EN FORMA ABREVIADA

Un número está escrito en **forma abreviada**, si tiene la forma $\mathbf{p \cdot 10^n}$, en que **p** es el **menor entero** y $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos: $0{,}00302 = 302 \cdot 10^{-5}$ $3.020.000 = 302 \cdot 10^{4}$

NOTACIÓN DESARROLLADA

Un número está escrito en notación desarrollada si se expresa como la suma de las cantidades que resulten de multiplicar cada dígito de dicho número por la potencia de 10 correspondiente a su valor posicional (..., centenas, decenas, unidades, décimos, centésimos,...).

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 560{,}321 &= 5 \cdot 10^{2} + 6 \cdot 10^{1} + 0 \cdot 10^{0} + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} \\ &= 5 \cdot 10^{2} + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 10^{-3} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

A) Indica los números que están expresados en notación científica, los que están en notación abreviada y los que están en notación desarrollada.

a) $32{,}5$ ___________ d) $7{,}23 \cdot 10^{-2}$ ___________

b) 325 ___________ e) $534 \cdot 10^{6}$ ___________

c) $3{,}25$ ___________ f) $3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-5}$ ___________

B) Expresa los siguientes números en notación científica, en notación abreviada y en notación desarrollada.

a) $30{,}56$ b) $0{,}0052$

NÚMEROS IRRACIONALES

Son aquellos decimales con **infinitas** cifras y **no** periódicas. Estos decimales **no** se pueden llevar a la forma de un número racional.

El conjunto de los números irracionales se denota por $\mathbb{Q}$ o **I**

Ejemplos: 1) 35,121021002... 2) $\sqrt{2}$ = 1,41421356237... 3) $\sqrt{18}$ = 4,24264068...

OBSERVACIONES:

Son números irracionales:

- todas las raíces no exactas. Ej. $\sqrt{14}$
- los números de la forma **$(a \pm \sqrt{b})$**, con **a** $\in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b}$ $\in \mathbb{Q}'$. Ej. $(3 - \sqrt{7})$
- los números de la forma **$a\sqrt{b}$**, con **a** $\in \mathbb{Q}$ **– {0}** y $\sqrt{b}$ $\in \mathbb{Q}'$. Ej. $5\sqrt{12}$
- los números π = 3,14159265... y e = 2,7182818...

EJERCICIOS

Encierra en un círculo los números irracionales

a)	3,14	c)	$(3 - \sqrt{9})$	e)	402,402402...
b)	$\sqrt{21}$	d)	$(\sqrt{17} - 4)$	f)	10,5100510005...

OPERATORIA CON NÚMEROS IRRACIONALES

Antes de empezar a operar con números irracionales es necesario conocer la definición y algunas propiedades de las raíces cuadradas, para **a** y **b** números racionales no negativos.

Definición: $\boxed{\sqrt{a} = b \text{ solamente si } b^2 = a}$ Ej. $\sqrt{9} = 3$ sólo si $3^2 = 9$

Propiedades:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ Ej. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3 \cdot 6} = \sqrt{18}$
- $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ Ej. $\sqrt{72} : \sqrt{2} = \sqrt{72 : 2} = \sqrt{36} = 6$
- $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ Ej. $5\sqrt{7} = \sqrt{5^2 \cdot 7} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{175}$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Al **sumar** o **restar** dos números irracionales, el resultado puede ser un número irracional o un número racional.

Ejemplos: $(\sqrt{2} - 3) + (\sqrt{2} + 3) = 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$ (número irracional)
$(\sqrt{2} - 3) + (3 - \sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$ (número racional)

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Al **multiplicar** o **dividir** dos números irracionales, el resultado puede ser un número irracional o un número racional.

Ejemplos: $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{Q}$ (número racional)

$\sqrt{12} : \sqrt{2} = \sqrt{12 : 2} = \sqrt{6} \in \mathbb{Q}'$ (número irracional)

EJERCICIOS DE DESARROLLO

1) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{25} : 2\sqrt{9} =$

2) $\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{8} =$

3) $(3\sqrt{3} - 2) - (4\sqrt{3} + 2) =$

4) $\sqrt{5}(1 - \sqrt{5}) + (\sqrt{24} : \sqrt{6} - \sqrt{5}) =$

NÚMEROS REALES

La **unión** de los **números racionales** con **los números irracionales**, forman el conjunto de los **números reales**, el cual se denota por IR.

OBSERVACIÓN: Todos los número son reales, exceptuando los números de la forma $\sqrt[n]{\mathbf{a}}$, con **a** < **0** y **n** par.

Ejemplos: $\sqrt{5}$ es número real — $\sqrt{-5}$ no es número real

$\sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{7}}$ es número real — $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{10}}$ no es número real

EJERCICIOS DE DESARROLLO

Indica si son o no, números reales.

a) 0 _________

b) $\sqrt{7}$ _________

c) $\sqrt[3]{-10}$ _________

d) $(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})$ _________

e) $-\sqrt{4}$ _________

f) $\sqrt{-9^2}$ _________

g) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ _________

h) $\sqrt{\sqrt{65} - 9}$ _________

EJERCICIOS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

1. $21{,}04 : 0{,}075 =$

A) $210{,}4 : 0{,}00075$
B) $2104 : 0{,}75$
C) $210{,}4 : 0{,}75$
D) $2{,}104 : 0{,}75$
E) $2104 : 0{,}0075$

2. Sean $a = 0{,}01$; $b = 0{,}001$; $c = 0{,}0001$. El valor de $\frac{a}{b \cdot c}$ es

A) 100.000
B) 10.000.000
C) 0,00000001
D) 0,0000001
E) 0,01

3. $0{,}12 : 0{,}4 \cdot 0{,}3 =$

A) 9
B) 0,16
C) 0,9
D) 0,09
E) 1

4. El decimal 0,0063 escrito en notación científica, es

A) $0{,}063 \cdot 10^{-1}$
B) $0{,}63 \cdot 10^{-2}$
C) $6{,}3 \cdot 10^{-3}$
D) $63 \cdot 10^{-4}$
E) $630 \cdot 10^{-5}$

5. ¿Cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) **siempre** verdadera(s)?

I) Al dividir dos números irracionales el cuociente es irracional.
II) Al multiplicar un número real con un número racional, el producto es racional.
III) Al sumar dos números irracionales, la suma es un número real.

A) Sólo II
B) Sólo III
C) Sólo I y III
D) Todas ellas
E) Ninguna de ellas

6. $\dfrac{0{,}0048 \cdot 1.700}{0{,}0051 \cdot 0{,}16} =$

A) 10^{-12}
B) 10^{-8}
C) 10^{-4}
D) 10^{0}
E) 10^{4}

7. ¿Cuál de los siguientes números es el más cercano a 10?

A) 10,1
B) 10,01
C) 10,005
D) 9,99
E) 9,989

8. $0{,}\overline{3} \cdot 0{,}\overline{9} =$

A) $0{,}27$
B) $0{,}\overline{27}$
C) $0{,}3$
D) $0{,}\overline{3}$
E) $0{,}33$

9. La expresión $\sqrt{\sqrt{5} - 3}$ es un número

A) entero
B) racional
C) irracional
D) real
E) ninguna de las anteriores

10. $0{,}08\overline{3} + 0{,}0\overline{6} =$

A) $\frac{1}{20}$
B) $\frac{3}{20}$
C) $\frac{9}{20}$
D) $\frac{1}{30}$
E) $\frac{9}{10}$

DSEMATRM03