

NÚMEROS NATURALES Y NÚMEROS ENTEROS

NUMERACIÓN

MILLONES			MILLARES			UNIDADES		
Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades

En el número 127.348.965;

- El valor del dígito 1 es: 100.000.000 , cien millones. Su valor posicional es de las centenas de millón.
- El valor del dígito 2 es: 20.000.000 , veinte millones. Su valor posicional es de las decenas de millón.
- El valor del dígito 7 es: 7.000.000 , siete millones. Su valor posicional es de las unidades de millón.
- El valor del dígito 3 es: 300.000 , trescientos mil. Su valor posicional es de las centenas de mil.
- El valor del dígito 4 es: 40.000 , cuarenta mil. Su valor posicional es de las decenas de mil.
- El valor del dígito 8 es: 8.000 , ocho mil. Su valor posicional es de las unidades de mil.
- El valor del dígito 9 es: 900 , novecientos. Su valor posicional es de las centenas.
- El valor del dígito 6 es: 60 , sesenta. Su valor posicional es de las decenas.
- El valor del dígito 5 es: 5 , cinco. Su valor posicional es de las unidades.

Un número se puede descomponer mediante sumas.

$127.348.965 = 100.000.000 + 20.000.000 + 7.000.000 + 300.000 + 40.000 + 8.000 + 900 + 60 + 5$
 Además se puede expresar como sumas de productos de **cifras o dígitos** por potencias de base 10. De aquí se concluye que nuestros números están escritos en **notación decimal**.

Dígitos = {0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9}

$127.348.965 = 1 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$ (Desarrollo decimal)

EJERCICIOS

1. Completa la siguiente tabla, indicando el valor de la cifra ennegrecida y escríbelo en notación decimal.

Número	Valor de la cifra o dígito	Notación decimal (desarrollada)
1.2 3 4.010		
70.003. 7 00		
1 40.000.000		
743. 1 57.234		
1.001.003. 2 81		
987.6 5 4.321		

2. Escribe en la forma más usual los siguientes números

Doscientos mil quinientos veinticuatro: _____

Dos millones setecientos cuarenta mil treinta y dos: _____

127 millones, 935 mil: _____

$700.000.000 + 20.000 + 900 + 3$: _____

$200.000.000 + 50.000.000 + 900.000 + 700 + 60 + 3$: _____

$2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$ _____

OPERATORIA

ADICIÓN: Para sumar naturales estos se deben ordenar de manera que coincidan las cifras que tengan el mismo valor posicional.

Ej. $18.343.275 + 5.637.107 =$

$$\begin{array}{r} 18.343.275 \\ + 5.637.107 \\ \hline 23.980.382 \end{array}$$

SUSTRACCIÓN: Para restar se ordena de la misma manera que para la adición.

Minuendo Sustraendo

Ej. $18.343.275 - 5.637.107 =$

$$\begin{array}{r} 18.343.275 \\ - 5.637.107 \\ \hline 12.706.168 \end{array}$$

OBSERVACIONES

- Ⓜ La suma de dos naturales siempre es otro natural.
- Ⓜ Si el minuendo es mayor que el sustraendo el resultado es positivo.
- Ⓜ Si el minuendo es menor que el sustraendo el resultado es negativo (no es número natural).
- Ⓜ El antecesor de un natural n es $n - 1$.
- Ⓜ El sucesor de un natural n es $n + 1$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

1. $3.295 + 1.725 =$
2. $8.078 - 1.596 =$
3. $(10^4 + 3 \cdot 10) + (2 \cdot 10^3 + 5) =$
4. Dos observadores de ballenas gastan \$ 2.567.850 en arriendo de un barco y \$ 3.853.780 en equipos. ¿Cuánto gastan en total?
5. Patricia buceó tres veces al día. La primera vez permaneció 37 minutos bajo el agua, la segunda 54 minutos y la tercera 107. ¿Cuánto tiempo estuvo Patricia bajo el agua?
6. Cierta barco tiene capacidad para 254 pasajeros y 30 autos. Si hay 134 pasajeros y 25 autos a bordo, ¿cuántos autos y pasajeros más puede transportar?

MULTIPLICACIÓN

$$5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 15$$

OBSERVACIÓN:

- ⊗ Al multiplicar dos naturales el resultado es siempre natural.
- ⊗ Si $a \cdot b = c$, entonces **c** es **múltiplo** de **a** y de **b**.
- ⊗ $2 \cdot n$, es un número **par**.
- ⊗ $2 \cdot n + 1$ es un número **impar**.

Ej. $2 \cdot 3 = 6$, 6 es múltiplo de 2 y de 3.

NÚMEROS PRIMOS: son aquellos naturales mayores que 1, que sólo tienen dos divisores; la unidad (1) y el mismo número.

Primos = $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$

Descomposición prima de un número o factorización de un número: Consiste en expresar un número como el producto de números primos.

CONJUNTO DE MÚLTIPLOS

Los múltiplos de un determinado número son los resultados que se obtienen al multiplicar dicho número por todos los naturales.

Ej. Los múltiplos de 6 son:

$$6 \cdot 1 = 6$$

$$6 \cdot 2 = 12$$

$$6 \cdot 3 = 18$$

$$6 \cdot 4 = 24$$

y así sucesivamente

$$M_6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots\}$$

Mínimo Común Múltiplo (m.c.m): El m.c.m entre dos o más números es el menor de los múltiplos comunes.

Ej. El mínimo común múltiplo entre 6 y 8 es:

$$M_6 = \{6, 12, 18, \mathbf{24}, 30, 36, 42, \mathbf{48}, 54, \dots\}$$

$$M_8 = \{8, 16, \mathbf{24}, 32, 40, \mathbf{48}, 56, \dots\}$$

$$\text{m.c.m}_{(6,8)} = 24$$

Para obtener el m.c.m. de dos o más números, se puede hacer una tabla en la cual los dos o más números se van dividiendo por números primos comunes hasta que cada número queda totalmente descompuesto.

Veamos el ejemplo anterior:

$$\left. \begin{array}{cc|c} \mathbf{6} & \mathbf{8} & :2 \\ \hline 3 & 4 & :2 \\ 3 & 2 & :2 \\ 3 & 1 & :3 \\ 1 & & \end{array} \right\} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{24}$$

EJERCICIOS DE DESARROLLO

1. $300 \cdot 600 =$

2. $388 \cdot 26 =$

3. $1.143 \cdot 45 =$

4. Encuentra el mínimo común múltiplo entre 12 , 15 y 18.
5. La familia González viajó por Chile en auto. Recorrió 698 kilómetros semanales durante 4 semanas. ¿Cuántos kilómetros recorrió?
6. Un comerciante compró en una fábrica 175 camisetas para adultos a \$ 1.200 cada una y 175 camisetas para niños a \$ 900 cada una, ¿cuánto gastó en total el comerciante?
7. En una estación del metro, los trenes pasan cada 6 minutos en dirección norte-sur y cada 4 minutos sur-norte. ¿Cuántos minutos deben transcurrir para que los trenes se encuentren por tercera vez en esa estación?

DIVISIÓN

$$13 : 4 = 3 \qquad 13 - 4 = 9 - 4 = 5 - 4 = 1$$

1
13 = dividendo
4 = divisor
3 = cociente
1 = resto

Es decir que la división es una resta sucesiva, en la cual el número de veces que se puede restar el divisor del dividendo es el cociente y lo que sobra al no poder continuar restando en los naturales se llama resto. Si nos devolvemos en la resta sucesiva tenemos el algoritmo de la división.

$$1 + 3 \cdot 4 = 13 ; \text{ es decir:}$$

$$\text{Dividendo} = \text{cociente} \cdot \text{divisor} + \text{resto (Algoritmo de la división)}$$

OBSERVACIONES:

- ⊗ Si el dividendo es mayor que el divisor, entonces el cociente es mayor o igual a 1.
- ⊗ Si el dividendo es múltiplo del divisor, el resto es 0 (división exacta).
- ⊗ Si un número al dividirlo por otro da resto cero, se dice que el primero es divisible por el segundo.

Conjunto de divisores: es el conjunto de números que divide exactamente a otro.

Ej.: Los divisores de 24 son:

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

Máximo Común Divisor (M.C.D.): es el mayor de los divisores comunes.

$$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$M.C.D._{(6,8)} = 2$$

Para encontrar el máximo común divisor entre dos o más números se construye una tabla similar a la del m.c.m., pero la del M.C.D. se termina cuando no hay divisor común.

$$\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & :2 \\ \hline 3 & 4 & \end{array}$$

Como los números 3 y 4 no tienen divisor primo común se detiene la tabla.

$$M.C.D._{(6,8)} = 2$$

REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Todo número es divisible:

- ⊗ por 2 si su última cifra es par. Ej. 24
- ⊗ por 3, si la suma de las cifras es múltiplo de 3. Ej. 1.254 ya que $1 + 2 + 5 + 4 = 12 \in M_{(3)}$.
- ⊗ por 4, si sus dos últimas cifras son ceros o múltiplo de 4. Ej. 600 ; 524.
- ⊗ por 5. si su última cifra es 0 ó 5. Ej. 520 , 125
- ⊗ por 6, si lo es por 2 y 3. Ej. 324 ya que es par y $3 + 2 + 4 = 9 \in M_{(3)}$
- ⊗ por 8, si sus 3 últimas cifras son ceros o múltiplo de 8. Ej. 1.000 , 5.888.
- ⊗ por 9, si la suma de sus cifras o dígitos es múltiplo de 9. Ej. 72 , ya que $7 + 2 = 9 \in M_{(9)}$
- ⊗ por 10, si su última cifra es 0. Ej. 6.520

EJERCICIOS DE DESARROLLO

A) Divide:

1) $222 : 4 =$

2) $1.236 : 618 =$

3) $1.151.337 : 251 =$

B) Escribe el algoritmo de las siguientes divisiones:

4)
$$\begin{array}{r} 34 : 7 = 4 \\ 6 \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r} 59 : 8 = 7 \\ 3 \end{array}$$

C) Resuelve los siguientes problemas:

- 1) Se reparten 32 bolitas entre 4 niños, ¿cuántas bolitas le corresponden a cada uno?

- 2) Al repartir 27 lápices entre unos niños, a cada uno le correspondió 5 y sobraron 2 lápices. ¿Entre cuántos niños se repartieron los lápices?

- 3) Si hoy es martes, en 25 días más ¿qué día será?

- 4) Si en un álbum que tiene 315 láminas, en cada hoja caben 15 láminas, ¿cuántas hojas tiene dicho álbum?

- 5) ¿Cuál es el menor natural que al ser dividido por 4 y 5 da resto 1?

EJERCICIOS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

1. ¿Cuál es el mayor número de 3 cifras que al sumarle 3 se tiene el menor número de 4 cifras?

A) 1.003
B) 1.001
C) 1.000
D) 999
E) 997

2. ¿Cuál es el antecesor del sucesor de 20?

A) 19
B) 20
C) 21
D) 22
E) 23

3. Si se suman 5 impares, el resultado es siempre
- A) par
 - B) impar
 - C) un natural que termina en 1
 - D) un natural múltiplo de 5
 - E) un natural múltiplo de 6
4. Un trabajador debe pagar un crédito en 10 cuotas mensuales. Si cada cuota es de \$ 60.000 , entonces, ¿cuál es el monto del crédito?
- A) \$ 6.000.000
 - B) \$ 600.000
 - C) \$ 60.000
 - D) \$ 6.000
 - E) Otro valor
5. ¿Cuántos kilómetros recorre en 10 días un caminante, si camina 3 km en una hora, y en un día camina 8 horas?
- A) 24
 - B) 30
 - C) 80
 - D) 104
 - E) 240
6. El sonido en el aire recorre $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿En cuánto tiempo oiremos en estampido de un cañón, que se encuentra a 6.460 metros?
- A) 18 s
 - B) 19 s
 - C) 20 s
 - D) 21 s
 - E) se escucha de inmediato
7. De la suma de tres naturales consecutivos es correcto afirmar que siempre
- A) es par
 - B) es impar
 - C) es múltiplo de 3
 - D) es múltiplo de 6
 - E) es divisor de 12

8. ¿Qué dígito falta en el número $12.3\boxed{}5$, para que sea divisible por 9?
- A) 9
B) 8
C) 7
D) 6
E) 0
9. La línea de buses "Águila" pasa cada 12 minutos por el frontis de la escuela y los buses "Sureños" cada 15 minutos. Si a las 13:00 hrs ambas pasan por la escuela, entonces ¿a qué hora estarán ambas nuevamente en el frontis de la escuela?
- A) 13:27 h
B) 13:30 h
C) 13:45 h
D) 14:00 h
E) 14:15 h
10. Una profesora desea repartir 48 lápices y 36 gomas, de manera tal que los alumnos seleccionados tengan la misma cantidad de lápices y la misma cantidad de gomas. ¿Cuál es el mayor número de alumnos que debe seleccionar para repartir estos regalos?
- A) 3
B) 6
C) 12
D) 24
E) 48

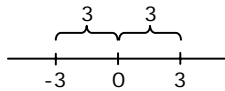
NÚMEROS ENTEROS

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

VALOR ABSOLUTO

Valor absoluto de un número es la distancia que existe entre el número y el 0, en la recta numérica.

Ej. $|-3| = 3$
 $|3| = 3$



OBSERVACIÓN

⊗ 0, no tiene signo. No es positivo ni negativo.

SIGNOS EN LAS OPERACIONES

ADICIÓN: la suma de números de igual signo, conservan el signo.

Ej.: $-5 + -3 = -8$

SUSTRACCIÓN:

⊙ Si el minuendo es mayor que el sustraendo el resultado es positivo.

Ej. : $5 - 3 = 2$

⊙ Si el minuendo es menor que el sustraendo, el resultado es negativo.

Ej. : $3 - 5 = -2$

EJERCICIOS DE DESARROLLO

A) Resuelve los siguientes ejercicios.

1) $15 - 8 - 20 =$

2) $35 - 48 + 13 =$

3) $105 - 204 + 18 =$

B) Descubre el número que falta.

1) $15 + \square = 23$

2) $17 - \square = -5$

3) $128 + \square = 110$

4) $\square - 14 = 14$

5) $\square + 5 = 101$

MULTIPLICACIÓN

Al multiplicar dos cantidades de igual signo, el resultado es **positivo**, y si son de distinto signo, el resultado es **negativo**.

Ej. $-5 \cdot (-3) = 15$

$5 \cdot (-3) = -15$

DIVISIÓN

En la división la regla de signos es igual que en la multiplicación.

Ej. $-36 : -12 = 3$

$-72 : 9 = -8$

OBSERVACIONES

- ⊗ En los enteros $2n + 1$ ó $2n - 1$ es impar.
- ⊗ En los enteros el conjunto de múltiplos y divisores se extiende a los negativos. Tanto el mínimo común múltiplo como el máximo común divisor sólo se consideran en los positivos.
- ⊗ 0 es múltiplo de todo número.

Ej. $M_4 = \{ \dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots \}$

$$D_4 = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$$

EJERCICIOS DE DESARROLLO

A) Resuelve los siguientes ejercicios.

1) $-12 \cdot 15 =$

2) $16 \cdot 4 =$

3) $36 : -4 =$

B) Descubre el número que falta.

4) $\square \cdot 30 = 270$

5) $2.448 : 36 = \square$

6) $\square : 5 = -25$

POTENCIAS

Sean $a \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$

- ⊗ $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n veces se multiplica a)

Ej. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

- ⊗ $a^0 = 1$, con $a \neq 0$

Ej. $(5 + 2)^0 = (7)^0 = 1$

SIGNOS DE UNA POTENCIA

El signo de una potencia es positivo, si **su base es positiva y el exponente es cualquiera, y también si su base es negativa y el exponente es par**. El signo de una potencia es **negativo** sólo si su base es negativa y su exponente es impar.

Ej. $3^4 = 81$
 $-3^4 = -81$

$(-2)^4 = 16$
 $-2^4 = -16$

$(-5)^3 = -125$
 $-5^3 = -125$

EJERCICIOS DE DESARROLLO

A) Resuelve los siguientes ejercicios.

1) $4^3 =$ 2) $(-3)^3 =$ 3) $-4^2 =$
4) $(-5)^2 =$ 5) $(-6)^3 =$ 6) $-11^2 =$

B) Descubre el número que falta.

1) $3\Box = 27$ 2) $\Box^3 = -8$ 3) $\Box^3 = 216$

ORDEN DE LAS OPERACIONES

Al operar un conjunto de operaciones, se debe respetar el siguiente orden:

1º Paréntesis

2º Potencias

3º Multiplicación o división (de izquierda a derecha)

4º Adición o sustracción (de izquierda a derecha)

Ej. $3 - \{5 + 3 \cdot 4\} =$
 $3 - \{5 + 12\} =$
 $3 - 17 = -14$

OBSERVACIÓN

⊗ Si hay dos o más paréntesis estos se resuelven de adentro hacia fuera.

DEFINICIONES

- ⊗ $n + 1$ es el entero sucesor de n .
- ⊗ $n - 1$ es el antecesor de n .
- ⊗ $2 \cdot n$ es número par.
- ⊗ $2 \cdot n + 1$ es número impar.

EJEMPLOS

- a) El sucesor de 5 es 6 ($5 + 1$), y el antecesor es 4 ($5 - 1$)
- b) Los números pares son = $\{\dots -6, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
- c) Los números impares son = $\{\dots -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

REGULARIDAD NUMÉRICA

Se dice que un conjunto de números o de figuras es una regularidad numérica si ellos conservan un patrón que los genera.

Ej. $3, 7, 11, 15, 19, \dots$; esta se genera al sumar 4 al término anterior.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

A) Resuelve los siguientes ejercicios.

1) $5 - \{1 + [2 - (4 + 8)]\} =$ 2) $2 - \{3 + [4 - 5^2] - 2\} - 2 =$ 3) $36 : 4 \cdot 3 =$

4) $3 + 5 - 7 =$ 5) $3 - 2 \cdot 3 + 8 =$ 6) $(-2)^3 =$

7) $\{-1 + 3[-2 + 4 - (2 - 7)] - 5\} =$ 8) $- \{-1[-1(-1)]\} =$

B) Resuelve los siguientes problemas.

- 1) Pedro tiene el doble de la edad de Juan, y éste tendrá 26 años en 10 años más. ¿Qué edad tiene Pedro?
- 2) Una profesora reparte dulces entre sus alumnos, a cada uno le regala 12 dulces. Si asistieron 28 alumnos ese día y le sobraron 28 dulces, ¿cuántos dulces tenía inicialmente?
- 3) 5 líneas de buses ofrecen 3 salidas diarias de El Salvador a Santiago. Julia quiere hacer el viaje, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?
- 4) Una bacteria triplica su cantidad en cada segundo. Si en un tubo de ensayo había una de ellas al comienzo, ¿cuántas habrá a los 10 segundos?
- 5) Los buses que salen al litoral lo hacen a San Antonio cada 20 minutos y a Viña Del Mar cada 15 minutos. Si a las 10:00 horas salieron ambos buses juntos, ¿a qué hora volverán a salir juntos?

6) Si dos números consecutivos suman 25 , ¿cuál es el doble del menor?

7) Si tres números pares suman 0 , entonces ¿cuál es el menor de ellos?

EJERCICIOS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

1. Si $a + b = 24$ y si $a = 17$, entonces ¿cuál es el sucesor de b ?

- A) 6
- B) 7
- C) 8
- D) 41
- E) 42

2. Si m es un número entero impar, el número impar antecesor de $3m + 6$ es

- A) $3m - 2$
- B) $3m$
- C) $m + 2$
- D) $3m + 3$
- E) $3m + 4$

3. $-6 + 5 \cdot 3 - 2^3 : 4 =$

- A) -2,75
- B) -5
- C) -7
- D) 7
- E) 11

4. $5 - \{-2^2 - [16 : (5^2 - 3^3)]\} =$

- A) -7
- B) -3
- C) -1
- D) 1
- E) 17

5. Si en la sustracción de enteros $\frac{69a^3 - 1251}{57b^2}$ el resultado es divisible por 6. ¿Cuál es el mayor valor posible para el producto ab ?
- A) 84
 B) 36
 C) 18
 D) 12
 E) 6
6. El promedio entre cinco números naturales consecutivos es k . ¿Cuál es el número central?
- A) $k + 5$
 B) $k - 5$
 C) $5k$
 D) $3k$
 E) k
7. Si llamamos T a la suma de tres números impares consecutivos, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?
- I) T es siempre impar.
 II) T nunca es divisible por el promedio de los números.
 III) T es siempre múltiplo de tres.
- A) Sólo I
 B) Sólo II
 C) Sólo III
 D) Sólo I y II
 E) Sólo I y III
8. Si $A = 2^3 \cdot 5$, $B = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ y $C = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) **falsa(s)**?
- I) 2^3 es un divisor común de A , B y C .
 II) 2^2 es un divisor de A y C .
 III) 80 es múltiplo de A y B .
- A) Sólo I
 B) Sólo II
 C) Sólo I y II
 D) Sólo I y III
 E) I, II y III

9. En la siguiente secuencia de diagrama (fig. 1)

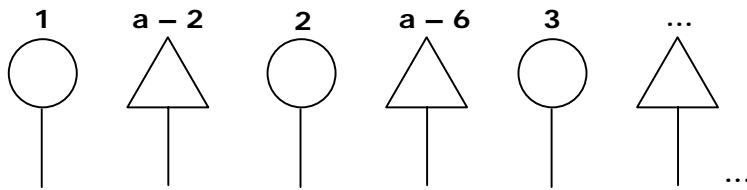


Fig. 1

al séptimo diagrama le corresponde

- A) 4
- B) $a - 4$
- C) $a - 12$
- D) 6
- E) $a - 8$

10. En un balde a su máxima capacidad se saca totalmente el agua de los depósitos de la figura 2. ¿Cuál debe ser la máxima capacidad de dicho balde para efectuar el menor número de extracciones.

- A) 2 lt
- B) 3 lt
- C) 6 lt
- D) 12 lt
- E) 24 lt

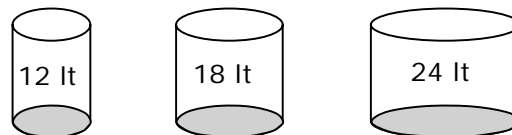


Fig. 2