

**UNIDAD: NÚMEROS Y PROPORCIONALIDAD
NATURALES Y ENTEROS****NÚMEROS NATURALES Y CARDINALES (\mathbf{IN} , \mathbf{IN}_0)**

Los elementos del conjunto $\mathbf{IN} = \{1, 2, 3, \dots\}$ se denominan “**números naturales**”. Si a este conjunto le unimos el conjunto formado por el cero, obtenemos $\mathbf{IN}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ llamado “conjunto de los **números cardinales**”.

NÚMEROS ENTEROS (\mathbf{Z})

Los elementos del conjunto $\mathbf{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ se denominan “**números enteros**” . Algunos subconjuntos de \mathbf{Z} son:

$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ enteros positivos

$\mathbf{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ enteros no negativos

$\mathbf{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ enteros negativos

$\mathbf{Z}_0^- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ enteros no positivos

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}^+$$

EJEMPLOS

- Si $a = -4$ y $b = 2$, entonces $-3a : b - [-a - 2 - (b - a)]$ es igual a
 - 22
 - 2
 - 2
 - 10
 - 14
- Un comerciante compró 30 pañuelos a \$200 cada uno y vendió 20 a \$180 cada uno. ¿A cuánto vendió, en promedio, cada uno de los pañuelos restantes si se sabe que no ganó ni perdió dinero?
 - \$190
 - \$200
 - \$240
 - \$250
 - \$260

DEFINICIONES: Sea n un número entero, entonces:

1. El sucesor de n es $(n + 1)$
2. El antecesor de n es $(n - 1)$
3. El entero $2n$ es siempre par
4. El entero $(2n - 1)$ es siempre impar
5. El entero $(2n + 1)$ es siempre impar
6. El par sucesor de $2n$ es $(2n + 2)$
7. El par antecesor de $2n$ es $(2n - 2)$
8. El impar sucesor de $(2n + 1)$ es $(2n + 3)$
9. El impar antecesor de $(2n + 1)$ es $(2n - 1)$
10. El cuadrado perfecto de n es n^2
11. El cubo perfecto de n es n^3

OBSERVACIONES:

1. Son cuadrados perfectos los enteros: 1, 4, 9, 16, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, ...
2. Son cubos perfectos los enteros: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ... y también: -1, -8, -27, -64, -125, -216, -343, ...

EJEMPLOS

1. Si n es un número natural par, entonces el sucesor par del sucesor de $n + 1$ está representado por
 - A) $n + 2$
 - B) $n + 3$
 - C) $n + 4$
 - D) $2n + 2$
 - E) $2n + 4$

2. Si p es un número entero, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?
 - I) $(p^2 - 1)$ es el entero antecesor del cuadrado de p .
 - II) $-(p - 1)$ es el entero antecesor de p .
 - III) $(p + 1)^2$ es el cuadrado del entero sucesor de p .
 - A) Sólo I
 - B) Sólo III
 - C) Sólo I y II
 - D) Sólo I y III
 - E) I, II y III

POTENCIAS EN Z

DEFINICIÓN

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots}_{n \text{ factores}} = a^n, \text{ con } a \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+$$

PROPIEDADES

1. $0^n = 0$, si $n \in \mathbb{Z}^+$
2. $1^n = 1$
3. Si n es par, $(-1)^n = 1$
4. Si n es impar, $(-1)^n = -1$

Signos de una potencia: $a^n = \begin{cases} \text{Positivo} & \text{si } a \neq 0 \text{ y } n \text{ es par.} \\ \text{Negativo} & \text{si } a < 0 \text{ y } n \text{ es impar.} \end{cases}$

EJEMPLOS

1. ¿Cuál es el valor de $(-1)^2 + 1^2 - 2^2 - (-2)^2$?

- A) -10
- B) -6
- C) 2
- D) 6
- E) 10

2. Un pliego de cartulina de 2 mm de espesor se dobla por la mitad, repitiendo el proceso 25 veces. La altura que alcanzaría esta cartulina después del vigésimo quinto doblado sería

- A) 2^{24} mm
- B) 2^{25} mm
- C) 2^{26} mm
- D) 2^{27} mm
- E) 2^{50} mm

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE POTENCIAS

Sean a y $b \in \mathbb{C}$, m y $n \in \mathbb{C}^+$

1.- Multiplicación de potencias de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2.- División de potencias de igual base

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad n \geq m, \quad a \neq 0$$

3.- Multiplicación de potencias de distinta base e igual exponente

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

4.- División de potencias de distinta base e igual exponente

$$a^n : b^n = (a : b)^n \quad b \neq 0$$

EJEMPLOS

1. $-3^8 \cdot 3^2 =$

- A) -3^{16}
- B) -3^{10}
- C) -3^6
- D) 3^{10}
- E) $(-9)^{16}$

2. $5^8 : (-5)^2 =$

- A) -5^{10}
- B) -5^6
- C) 5^4
- D) 5^6
- E) 5^{10}

3. $4^5 \cdot 6^5 \cdot 24^2 =$

- A) 24^{24}
- B) 24^{12}
- C) 24^{10}
- D) 24^7
- E) 24^3

4. $(-4)^2 : 2^2 =$

- A) 16
- B) 4
- C) 2
- D) -2
- E) -4

DEFINICIÓN

$$a^0 = 1 \quad a \neq 0$$

OBSERVACIÓN: 0^0 no está definido

POTENCIA DE UNA POTENCIA

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

EJEMPLOS

1. $-2^0 - 3^2 =$

- A) -10
- B) -9
- C) -8
- D) 8
- E) 10

2. $4^3 \cdot 8^2 =$

- A) 32^6
- B) 32^5
- C) 2^{12}
- D) 2^{10}
- E) 2^8

3. $[(15^4)^{-5} \cdot 15^{20}] : 15^0 =$

- A) 15^{20}
- B) 15^{19}
- C) 15^{15}
- D) 1
- E) 0

MÚLTIPLO Y DIVISOR

En la expresión $a = b \cdot c$ en que a , b y c son números enteros, a es múltiplo de b y de c o bien b y c son divisores o factores de a .

EJEMPLOS

- Si $M(n)$ representa el conjunto formado por todos los números enteros múltiplos de n , entonces $\{\dots -18, -9, 0, 9, 18, \dots\}$ corresponde al conjunto
 - $M(3)$
 - $M(6)$
 - $M(9)$
 - $M(18)$
 - Z

- ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) divisores de 105?
 - 15
 - 21
 - 35
 - Sólo I y II
 - Sólo I y III
 - Sólo II y III
 - I, II y III
 - Ninguno de ellos

- Si $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $B = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ y $C = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?
 - 2^3 es un divisor común de A y C.
 - B es múltiplo de $3^2 \cdot 5$.
 - $2 \cdot 3^2$ es divisor común de A, B y C.
 - Sólo II
 - Sólo III
 - Sólo II y III
 - I, II y III
 - Ninguna de ellas

REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Un número entero es divisible:

| Por | Cuando |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Termina en cifra par. |
| 3 | La suma de sus cifras es múltiplo de tres. |
| 4 | Las dos últimas cifras forman un número múltiplo de cuatro o bien son ceros. |
| 5 | La última cifra es cero o cinco. |
| 6 | Es divisible por dos y por tres a la vez. |
| 7 | La diferencia entre el doble de la última cifra y el número que forman las cifras restantes es múltiplo de siete. |
| 8 | Las tres últimas cifras forman un número múltiplo de ocho o bien son ceros. |
| 9 | La suma de sus cifras es múltiplo de nueve. |
| 10 | Termina en cero. |
| 11 | La diferencia entre la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares y las que ocupan los lugares impares es múltiplo de once. |

EJEMPLOS

- ¿Cuál debe ser el mayor valor del dígito x para que el número $a = 6x542$ sea divisible por 3?
 - 0
 - 1
 - 4
 - 7
 - 9

- ¿Cuántos números enteros positivos de dos cifras tienen la siguiente propiedad: "Es divisible por 6 y la cifra de las unidades es el sucesor de la cifra de las decenas"?
 - Ninguno
 - 1
 - 2
 - 3
 - Más de 3

NÚMEROS PRIMOS, COMPUESTOS Y DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

Números primos: Son aquellos enteros positivos que tienen sólo dos divisores distintos. Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Números compuestos: Son todos los enteros positivos mayores que uno que no son primos. Los primeros números compuestos son: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, ...

TEOREMA FUNDAMENTAL

Todo número compuesto se puede expresar de manera única como el producto de factores de números primos.

EJEMPLOS

- Si a es primo, entonces a^2 es necesariamente un número
 - par.
 - impar.
 - primo.
 - compuesto.
 - par y compuesto.

- El número 2.856 es el producto de tres factores. Si dos de los factores son 12 y 14, ¿cuál es el otro factor?
 - 17
 - 16
 - 15
 - 13
 - Ninguna de las anteriores

- Al expresar los números 60 y 90 en factores primos, se obtiene respectivamente
 - $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
 - $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
 - $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
 - $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2^2 \cdot 3 \cdot 5$
 - $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Es el menor múltiplo común positivo de dos o más enteros.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

Es el mayor divisor común entre dos o más enteros.

CÁLCULO DEL m.c.m. Y M.C.D MEDIANTE DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Se descomponen los números en factores primos:

1. El **m.c.m.** se obtiene como producto de todos los factores primos. En el caso de existir factores primos comunes se considera aquel que posea el exponente mayor.
2. El **M.C.D.** se obtiene como producto de los factores primos comunes considerando aquel que posea el exponente menor.

EJEMPLOS

1. El **m.c.m** y **M.C.D** entre $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ y $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ son respectivamente
 - A) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ y $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
 - B) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ y $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
 - C) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ y $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$
 - D) $2^3 \cdot 3^3$ y $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
 - E) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 11$ y $2^2 \cdot 3^2$
2. Si un niño comienza contando de 5 en 5, y otro lo hace de 6 en 6, ¿en qué número se encuentran por segunda vez?
 - A) 15
 - B) 30
 - C) 45
 - D) 60
 - E) 75
3. ¿Cuál es la regla de mayor longitud con la que se puede medir exactamente las tres longitudes siguientes: 180 cm, 240 cm y 400 cm?
 - A) 8 cm
 - B) 12 cm
 - C) 20 cm
 - D) 24 cm
 - E) 40 cm

EJERCICIOS

1. $-3^2 - 2^4 =$

- A) -25
- B) -14
- C) -7
- D) 7
- E) 25

2. ¿Cuál es el valor de $(-n)^{n-1} - (n)^n$ cuando $n = 3$?

- A) -18
- B) -15
- C) -3
- D) 3
- E) 36

3. $5 - \{-2^2 - [16 : (5^2 - 3^3)]\} =$

- A) -7
- B) -3
- C) -1
- D) 1
- E) 17

4. $6^3 + 6^3 + 6^3 + 6^3 + 6^3 + 6^3 =$

- A) 6^3
- B) 6^4
- C) 6^{18}
- D) 36^3
- E) 36^{18}

5. Si m es un número entero impar, el número impar antecesor de $3m + 6$ es
- A) $3m$
 - B) $3m + 8$
 - C) $3m + 7$
 - D) $3m + 5$
 - E) $3m + 4$
6. Si p es un número entero par y q es un número entero impar, entonces ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) **siempre** verdadera(s)?
- I) p^2 un número positivo.
 - II) $-q^2$ es un número positivo.
 - III) $(p - q)^2$ es un número impar positivo.
- A) Sólo I
 - B) Sólo III
 - C) Sólo I y III
 - D) Sólo II y III
 - E) Ninguna de ellas
7. Si $t + 3$ es el sucesor del número natural n , entonces el sucesor de t en función de n es
- A) $n + 2$
 - B) $n + 1$
 - C) n
 - D) $n - 1$
 - E) $n - 2$
8. Sea M un conjunto de tres números naturales pares consecutivos, cuyo elemento menor es $(n - 4)$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s)?
- I) El promedio de los tres términos es $n - 2$.
 - II) El producto de los tres números es par.
 - III) La suma de los tres números es múltiplo de 6.
- A) Sólo I
 - B) Sólo I y II
 - C) Sólo I y III
 - D) Sólo II y III
 - E) I, II y III

9. Si k es un número entero, entonces $[(-1)^k + (-1)^{k+1}] - (-1^2)$ es igual a

- A) -1
- B) 0
- C) 1
- D) 2
- E) 3

10. La expresión $2^4 \cdot 3^3 + 2^3 \cdot 3^2$ es equivalente a

- A) $2^7 \cdot 3^5$
- B) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$
- C) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$
- D) $2^2 \cdot 3$
- E) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

11. ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) divisibles(s) por 18?

- I) $3^4 \cdot 2^2$
- II) $3 \cdot 2^3$
- III) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

- A) Sólo I
- B) Sólo III
- C) Sólo I y II
- D) Sólo I y III
- E) I, II y III

12. El mínimo común múltiplo entre a y b es 36 con $a \neq b$. Entonces, los valores posibles de a y b pertenecen a

- I) los múltiplos de 36.
- II) los divisores de 36.
- III) la intersección entre los múltiplos de 36 y los divisores de 36.

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y II
- E) Sólo II y III

13. ¿Cuál de los siguientes números no es divisor de $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2$?

- A) 7
- B) $2^2 \cdot 7^2$
- C) $2 \cdot 3 \cdot 7$
- D) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
- E) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2$

14. El m.c.m. y el M.C.D. de los números 666, 777 y 888 son respectivamente

- A) $37 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ y 37
- B) $37 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ y $37 \cdot 3$
- C) $37 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ y $37 \cdot 3$
- D) $37 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 7$ y $37 \cdot 3^2$
- E) $37 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ y 37

15. A una distribuidora se le solicita un pedido de bebidas de tres tipos diferentes:

- Tipo A: 18 bebidas
- Tipo B: 45 bebidas
- Tipo C: 135 bebidas

Si la embotelladora debe enviar las bebidas en cajas, todas de igual tamaño y con un mismo tipo de bebida, ¿cuántas bebidas deben contener las cajas para que éstas sean el menor número posible?

- A) 3
- B) 6
- C) 9
- D) 12
- E) 18

16. Dos letreros luminosos se encienden con intermitencias de 42 y 54 segundos respectivamente. Si a las 20 horas y 15 minutos se encuentran ambos encendidos, ¿a qué hora estarán nuevamente ambos encendidos?

- A) 20 hr 21 min 18 seg
- B) 20 hr 21 min 42 seg
- C) 20 hr 21 min 36 seg
- D) 20 hr 15 min 54 seg
- E) 20 hr 16 min 54 seg

17. Con un balde a su máxima capacidad se saca totalmente el agua de los depósitos de la figura 1. ¿Cuál debe ser la máxima capacidad de dicho balde para efectuar el menor número de extracciones?

- A) 2 lt
- B) 3 lt
- C) 6 lt
- D) 12 lt
- E) 24 lt

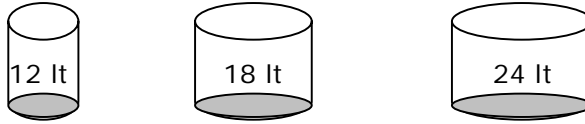


Fig. 1

18. Tres líneas de buses salen al litoral central con frecuencias de 6, 8 y 12 minutos respectivamente. Si a las 7:00 horas A.M. salen simultáneamente las tres líneas, en su primera salida, ¿cuántas salidas simultáneas tendrán las tres líneas hasta las 10:00 A.M.?

- A) 9
- B) 8
- C) 7
- D) 6
- E) 3

19. Sea $n \in \mathbb{Z}$. La expresión $3(1 + n)$ representa un múltiplo de 6 si:

- (1) n es un número impar.
 - (2) $n+1$ es un número par.
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas
 - D) Cada una por sí sola
 - E) Se requiere información adicional

20. Sea $P = \{h, j, k\}$ con un solo elemento par. ¿Qué elemento de P es un número par?

- (1) $(h + j)$ es par.
 - (2) $(h + k)$ es impar y j es impar.
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

| Ejemplos Págs. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------------|---|---|---|---|
| 1 | D | C | | |
| 2 | C | D | | |
| 3 | B | C | | |
| 4 | B | D | D | B |
| 5 | A | C | D | |
| 6 | C | D | C | |
| 7 | D | C | | |
| 8 | D | A | B | |
| 9 | C | D | C | |

CLAVES PÁG. 10

1. A 6. B 11. D 16. A
2. A 7. D 12. B 17. C
3. D 8. E 13. E 18. B
4. B 9. C 14. C 19. D
5. E 10. E 15. C 20. A