GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 21

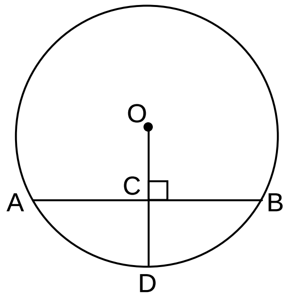
UNIDAD: GEOMETRÍA

TEOREMAS REFERENTES A UNA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA 1

Si un radio de una circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces la dimidia y viceversa.

$$\overline{OD} \wedge \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} \cong \overline{CB}$$



TEOREMA 2

Si un radio de una circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces dimidia al arco que subtiende la cuerda y viceversa.

$$\overline{OD} \wedge \overline{AB} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{DB}$$

EJEMPLOS

1. En la circunferencia de centro O de la figura 1, $\overline{OD} \perp \overline{AB}$. Si $\overline{AC}$ = 4 cm, $\overline{OC} = \frac{3}{4}\overline{BC}$ y $\overline{DC} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, entonces $\overline{OD}$ mide

A) 2 cm
B) 3 cm
C) 4 cm
D) 5 cm
E) 10 cm

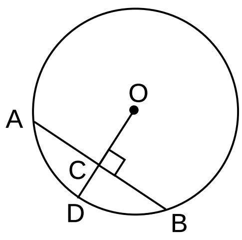


Fig. 1

2. En la circunferencia de centro O de la figura 2, $\overline{AD} = \overline{DC}$. Si $\measuredangle$ CBD = 4α y $\measuredangle$ DCB = α, entonces α mide

A) 18º
B) 36º
C) 54º
D) 72º
E) No se puede determinar

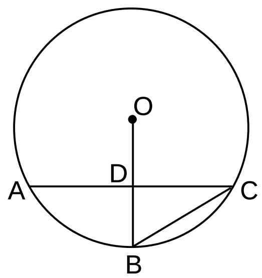


Fig. 2

TEOREMA 3

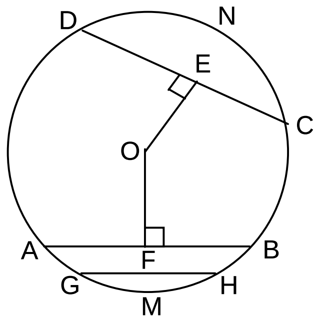
Cuerdas congruentes subtienden arcos congruentes y viceversa.

$$\overset{\frown}{AMB} \cong \overset{\frown}{CND} \Leftrightarrow \overline{CD} \neq \overline{AB}$$

TEOREMA 4

Cuerdas congruentes equidistan del centro y viceversa.

$$\overline{OF} \neq \overline{OE} \Leftrightarrow \overline{CD} \neq \overline{AB}$$



TEOREMA 5

Cuerdas paralelas determinan entre ellas arcos congruentes.

$$\overline{AB} \,//\, \overline{GH} \Rightarrow \overset{\frown}{AG} \cong \overset{\frown}{BH}$$

EJEMPLOS

1. En la circunferencia de centro O de la figura 1, $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ son diámetros. Si $\overline{OC}$ = 4 cm y $\overline{CD}$ = 5 cm, entonces $\overline{OA}$ + $\overline{OB}$ + $\overline{AB}$ es

   A) 9 cm
   B) 12 cm
   C) 13 cm
   D) 14 cm
   E) 15 cm

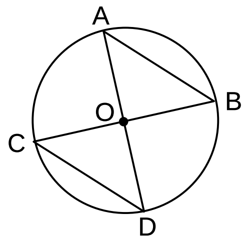


Fig. 1

2. Para que la cuerda $\overline{AB}$ sea paralela a la cuerda $\overline{CD}$ en la circunferencia de centro O de la figura 2, debe cumplirse que

   A) $\overline{AB} = \overline{CD}$
   B) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$
   C) $\overline{AR} = \overline{CQ}$
   D) $\overline{OR} = \overline{OQ}$
   E) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

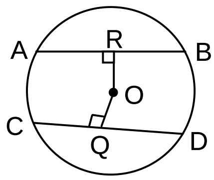


Fig. 2

3. En la circunferencia de centro O de la figura 3, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{OE} \perp \overline{CD}$ y $\overline{OF} \perp \overline{AB}$. Si $\measuredangle$ OEF = 27º, entonces el $\measuredangle$ EFB mide

   A) 27º
   B) 36º
   C) 43º
   D) 53º
   E) 63º

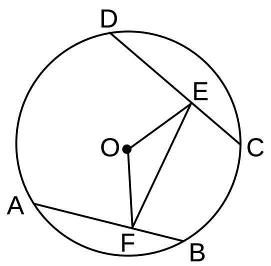
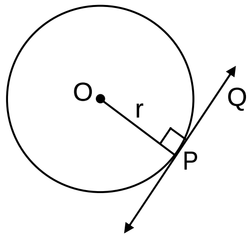


Fig. 3

TEOREMA 6

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

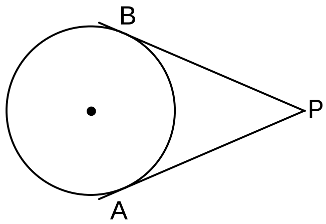
$$\overline{QP} \text{ tangente en } P \Rightarrow \overline{QP} \perp \overline{OP}$$



TEOREMA 7

Los segmentos tangentes trazados desde un punto a una circunferencia, son congruentes.

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$



EJEMPLOS

1. En la figura 1, $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia de centro O y $\overline{OT}$ es radio. Si $\overline{OP} = 10$ y $\overline{OT} = 5$, entonces $\overline{PT}$ =

   A) $\sqrt{15}$
   B) $5\sqrt{3}$
   C) $5\sqrt{5}$
   D) 15
   E) 20

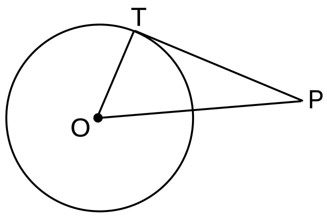


Fig. 1

2. En la figura 2, $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ son tangentes a la circunferencia de centro O, en Q y R respectivamente. Si ∡ PQR = 6 t – 2 y ∡ PRQ = 4t + 22 , entonces la medida del ángulo QPR es

   A) 12º
   B) 40º
   C) 70º
   D) Otro valor
   E) No se puede determinar

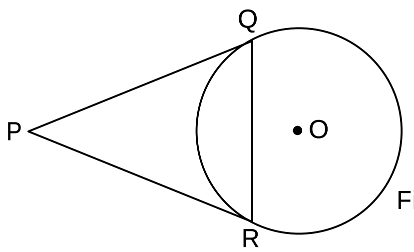


Fig. 2

3. En la figura 3, $\overleftrightarrow{DE}$ es tangente a la circunferencia de centro O, en D. ¿Cuál es el valor del ∡ x?

   A) 36°
   B) 26°
   C) 18°
   D) 12°
   E) Falta información

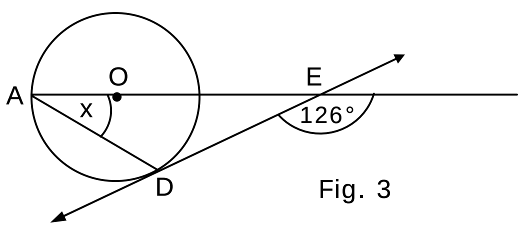
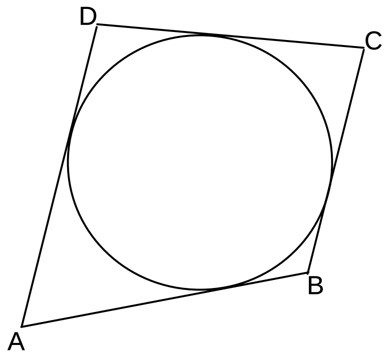


Fig. 3

TEOREMA 8

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de las longitudes de los lados opuestos es la misma.

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{BC} + \overline{AD}}$$



EJEMPLOS

1. ¿Cuál es la suma de los lados del cuadrilátero circunscrito a la circunferencia de la figura 1?

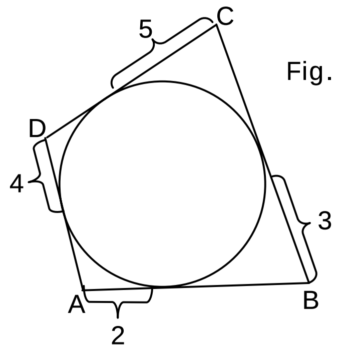


Fig. 1

A) 34
B) 32
C) 28
D) 22
E) 14

2. En la figura 2, la circunferencia de centro O, está inscrita en el cuadrilátero ABCD, siendo F y E puntos de tangencia. Si $\overline{DF}$ = 5 cm, $\overline{DA}$ = 12 cm, $\overline{EB}$ = 6 cm y $\overline{CF}$ = 8 cm, entonces la suma de los lados del cuadrilátero es

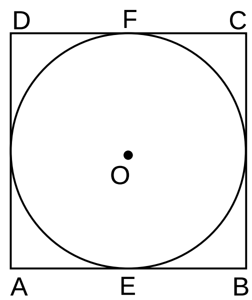


Fig. 2

A) 31 cm
B) 44 cm
C) 50 cm
D) 52 cm
E) 54 cm

3. En la figura 3, la circunferencia de centro O es tangente interior al cuadrilátero ABCD en los puntos E, F, G y H. Si $\overline{AB}$ = x + 4 , $\overline{BC}$ = x + 5 , $\overline{DC}$ = x + 2 y $\overline{DA}$ = 2x – 1 , entonces $\overline{AD}$ =

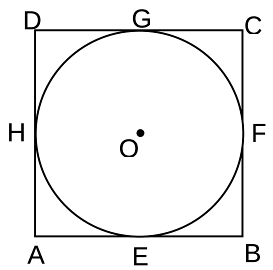


Fig. 3

A) 2
B) 3
C) 4
D) 6
E) 7

EJERCICIOS

1. En la circunferencia de centro O de la figura 1, $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC}$. Si $\angle$ AOC = 100º, entonces x mide

   A) 25º
   B) 40º
   C) 45º
   D) 50º
   E) 70º

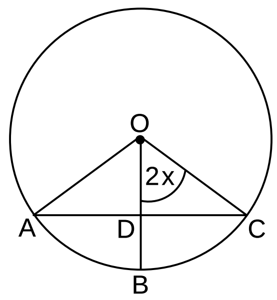


Fig. 1

2. En la circunferencia de centro O (fig. 2), $\overline{OD} \perp \overline{AB}$. Si $\overline{AC}$ = 3x + 5 y $\overline{BC}$ = x + 15 , entonces $\overline{AB}$ mide

   A) 5
   B) 10
   C) 15
   D) 20
   E) 40

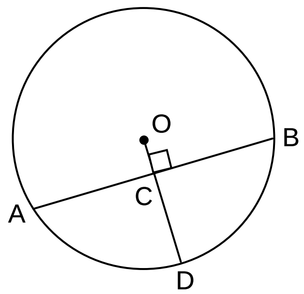


Fig. 2

3. En la figura 3, la circunferencia de centro O está inscrita en el ΔABC, siendo D, F y E los puntos de tangencia. Si $\overline{AD}$ = 4 cm, $\overline{DB}$ = 6 cm y $\overline{CE}$ = 2 cm, entonces el perímetro del triángulo es

   A) 12 cm
   B) 15 cm
   C) 18 cm
   D) 21 cm
   E) 24 cm

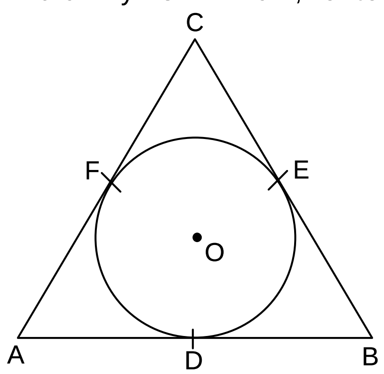


Fig. 3

4. En la circunferencia de centro O (fig. 4), $\angle$ ABO = $\angle$ BOC = 2$\angle$ BOA. Entonces, $\angle$ CBO =

   A) 36º
   B) 45º
   C) 54º
   D) 60º
   E) 72º

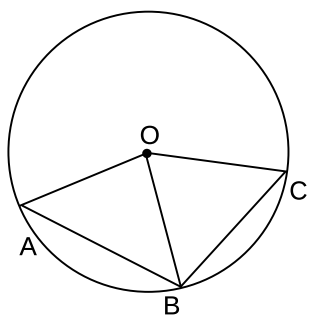


Fig. 4

5. En la circunferencia de la figura 5, las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes. Si $\overset{\frown}{AB} = 10x + 5$ y $\overset{\frown}{CD} = 12x - 21$, entonces la medida del arco AB es

A) 135º
B) 75º
C) 125º
D) 151º
E) Ninguna de las anteriores

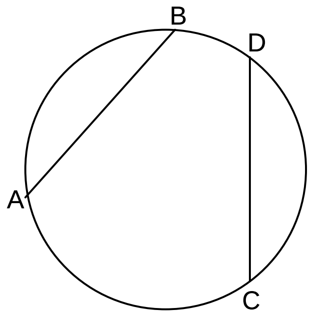


Fig. 5

6. En la circunferencia de centro O de la figura 6, se tiene: $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{OC}$. Entonces, el $\triangle OBC$ es

A) Equilátero
B) Acutángulo
C) Isósceles acutángulo
D) Isósceles rectángulo
E) Rectángulo escaleno

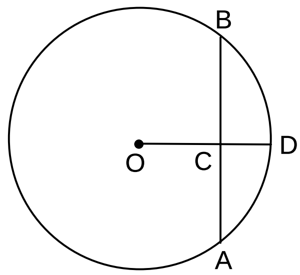


Fig. 6

7. Si la figura 7, $\overline{SP}$, $\overline{SR}$ y $\overline{RQ}$ son tangentes a la circunferencia de centro O, en los puntos P, T y Q respectivamente. Si $\dfrac{\overline{SP}}{\overline{SR}} = \dfrac{2}{5}$ y $\overline{SP} + \overline{RT} = 15$ cm, entonces $\overline{ST}$ =

A) 3 cm
B) 4 cm
C) 5 cm
D) 6 cm
E) 7 cm

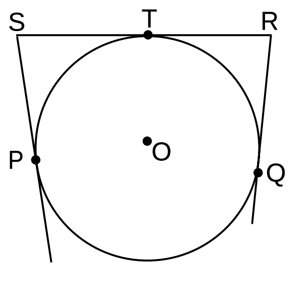


Fig. 7

8. En la circunferencia de centro O de la figura 8, se tiene: $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{CP} = 6$ cm, $\overline{OQ} = 3$ cm, $\overline{OP} \perp \overline{CD}$ y $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$. Entonces, la medida de $\overline{OP}$ es

A) 2 cm
B) 3 cm
C) 6 cm
D) 10 cm
E) Faltan datos para determinarlo

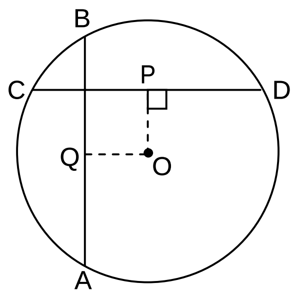


Fig. 8

9. En la circunferencia de centro O (fig. 9), $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros, $\angle$ AOD = 120º y $\overleftrightarrow{L}$ tangente en B. Entonces, $\angle$ x =

A) 30º
B) 45º
C) 50º
D) 60º
E) 70º

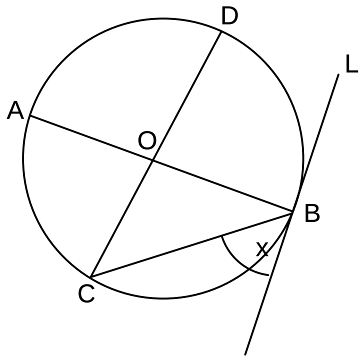


Fig. 9

10. En la circunferencia de la figura 10, $\overline{EO}$ = $\overline{OD}$, $\overline{BD}$ = $\overline{DC}$ y $\angle$ EOD = 70º. Si O es centro de la circunferencia, entonces $\angle$ x =

A) 20º
B) 35º
C) 55º
D) 60º
E) 72,5º

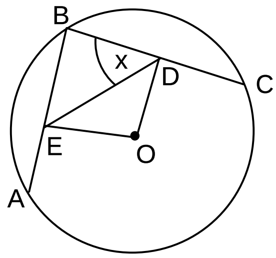


Fig. 10

11. En la figura 11, $\overline{PM}$ y $\overline{PQ}$ son tangentes a la circunferencia de centro O en los puntos M y Q respectivamente. Además $\overset{\frown}{NQ}$ = $\overset{\frown}{QM}$ = $\overset{\frown}{MN}$. Entonces el valor del $\angle$ MPQ es

A) 120º
B) 100º
C) 90º
D) 60º
E) Ninguna de las anteriores

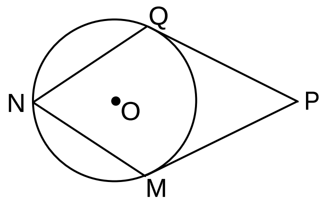


Fig. 11

12. En la figura 12, la circunferencia con centro O está inscrita en el cuadrado ABCD. Si $\overline{BC}$ = 6 y $\overline{OC}$ intersecta a la circunferencia en el punto E, entonces $\overline{EC}$ =

A) $3\sqrt{2} - 3$
B) $3 - \sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2} + 3$
D) 3
E) $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 3$

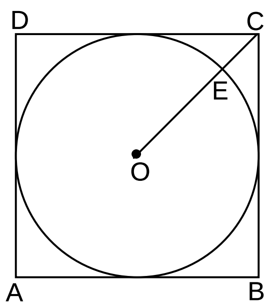


Fig. 12

13. En la figura 13, se tiene: $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BE}$ tangentes a la circunferencia de centro O en C, D y E respectivamente. Si $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BE}$, entonces la medida del ángulo AOB es

A) 30º
B) 60º
C) 90º
D) Faltan datos para determinarlo
E) Ninguna de las anteriores

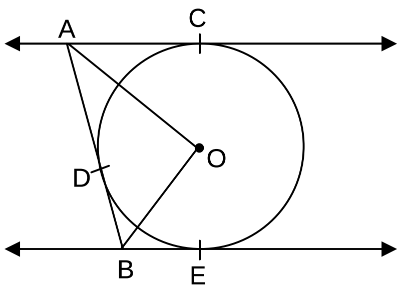


Fig. 13

14. $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia de centro O (fig. 14). La medida del $\angle$ ABC se puede determinar si:

(1) $\overline{AB} = 2\,\overline{AC}$

(2) $\angle$ COB = 2$\angle$ AOC

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

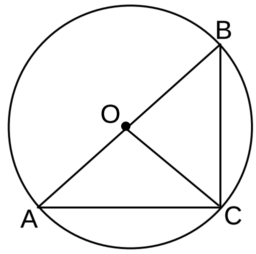


Fig. 14

15. En la figura 15, los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia de centro O. Se puede determinar la medida del ángulo AOC si:

(1) $\angle$ OAB = 40º

(2) $\angle$ OCB = 55º

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

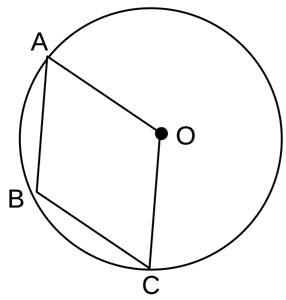


Fig. 15

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3
1	D	A	
2	C	B	E
3	B	B	C
4	C	D	B

CLAVES PÁG. 5

1.	A	6.	D	11.	D
2.	E	7.	D	12.	A
3.	E	8.	B	13.	C
4.	C	9.	D	14.	D
5.	A	10.	B	15.	C