

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA N° 29

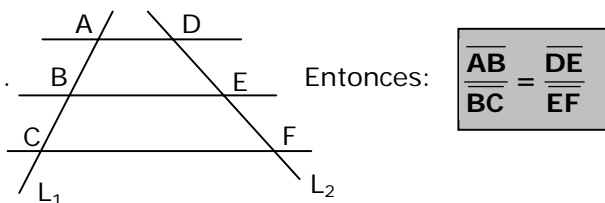
UNIDAD: GEOMETRÍA

GEOMETRÍA PROPORCIONAL

TEOREMA DE THALES Y COROLARIOS

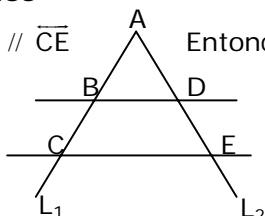
Teorema de Tales: Si dos rectas se cortan por tres o más paralelas, los segmentos determinados en una de ellas son respectivamente proporcionales a los segmentos determinados en la otra.

En la figura, L_1 y L_2 son rectas y $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$.



Corolarios

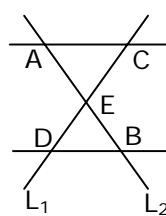
Sea $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$



Entonces:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

Sea $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$



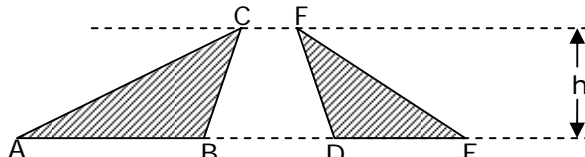
Entonces:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CE}{ED}$$

OBSERVACIÓN:

Las áreas de los triángulos que tienen la misma altura están, respectivamente, en la misma razón que lo están sus bases.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{AB}{DE}$$



EJEMPLOS

1. En el triángulo EFD de la figura 1, \overline{EG} es el triple de \overline{GH} y \overline{GH} es el doble de \overline{HF} . Entonces, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

- I) $\frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle DFH}} = \frac{1}{3}$
- II) $\frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle DFH}} = \frac{6}{1}$
- III) $\frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle DFH}} = \frac{2}{9}$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y II
- E) I, II y III

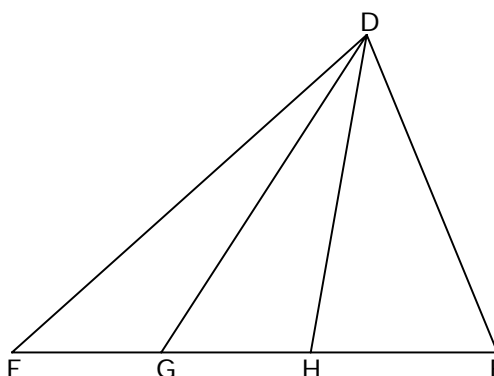


Fig. 1

2. En la figura 2, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$, entonces $x =$

- A) 0
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 6

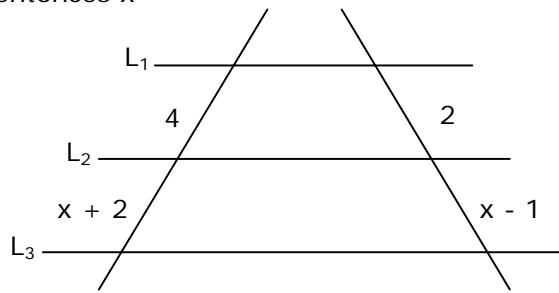


Fig. 2

3. Si en la figura 3, $L_1 \parallel L_2$, entonces $x^2 - 64 =$

- A) -63
- B) -54
- C) 10
- D) 36
- E) 164

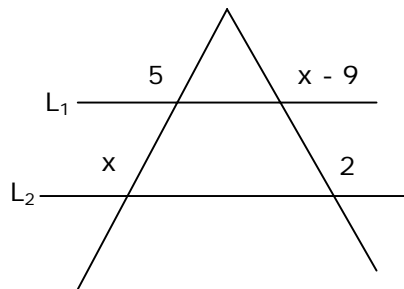


Fig. 3

4. Si en la figura 4, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$, entonces $x + y =$

- A) 24
- B) 11
- C) 8
- D) 5
- E) 3

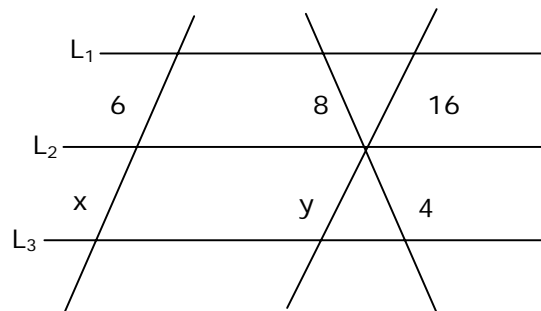


Fig. 4

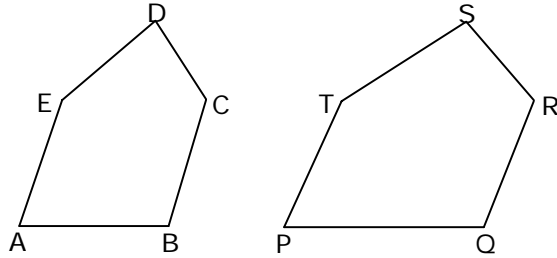
DEFINICIÓN

Dos polígonos de un mismo número de lados, se dirán **semejantes**, cuando los ángulos de uno de ellos sean respectivamente congruentes con los ángulos del otro y cuando además, tengan sus lados homólogos proporcionales.

En la figura 1, pentágono $ABCDE \sim$ pentágono $PQRST$ sí y solo sí:

a) $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$,
 $\angle D \cong \angle S$ y $\angle E \cong \angle T$

b) $\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{TP}}$



OBSERVACIONES

- (1) Esta definición encierra la idea de similitud de forma: es decir, dos polígonos son semejantes, sí y sólo sí tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.
- (2) En el caso particular de los triángulos estos son semejantes si tienen congruentes los ángulos y los lados homólogos proporcionales.
- (3) La congruencia es un caso particular de semejanza.

EJEMPLOS

1. Si las diagonales de dos cuadrados miden $3\sqrt{2}$ y $4\sqrt{2}$ respectivamente, entonces sus lados están en la razón
 - A) 3 : 4
 - B) 3 : $\sqrt{2}$
 - C) 2 : $\sqrt{3}$
 - D) $\sqrt{3}$: 2
 - E) Ninguna de las anteriores
2. Se desea dibujar en un plano un terreno rectangular de 10 metros de frente por 30 metros de fondo, usando una escala de 1 cm : 5 m. ¿Cuáles serán las dimensiones en el dibujo del terreno?

	Frente	Fondo
A)	2 cm	5 cm
B)	2 cm	6 cm
C)	3 cm	5 cm
D)	3 cm	9 cm
E)	4 cm	12 cm

TEOREMAS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Para establecer la semejanza entre dos triángulos no es necesario verificar cada una de las seis condiciones expuestas anteriormente, sino que la ocurrencia de algunas de ellas provocan necesariamente la ocurrencia de las otras restantes.

TEOREMA 1 (TEOREMA FUNDAMENTAL)

Para que dos triángulos sean semejantes, los ángulos de uno de ellos deben ser congruentes a los ángulos del otro.

O sea, en la figura 1,

Si $\sphericalangle A \cong \sphericalangle P$ y $\sphericalangle B \cong \sphericalangle Q$,
entonces

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

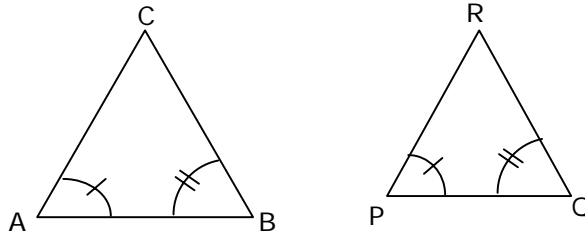


Fig. 1

COROLARIO

Toda paralela a un lado de un triángulo, determina un triángulo semejante al primero (figura 2).

O sea: Si $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, entonces

$$\triangle CDE \sim \triangle CAB$$

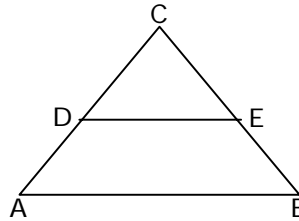


Fig. 2

EJEMPLOS

1. En la figura 3, el trazo DE es paralelo al lado \overline{AB} del triángulo ABC. Entonces, el triángulo CDE es semejante al triángulo ABC en su orden

- A) BAC
- B) CBA
- C) CAB
- D) BCA
- E) ABC

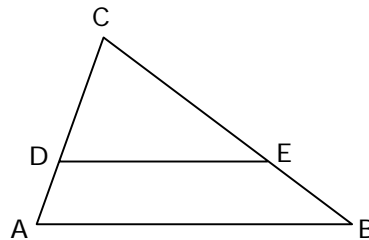


Fig. 3

3. Las rectas L_1 y L_2 de la figura 4, son paralelas y los trazos DB y AE se cortan en C. Entonces, el triángulo ABC es semejante al triángulo DEC en su orden

- A) DCE
- B) EDC
- C) DEC
- D) ECD
- E) CED

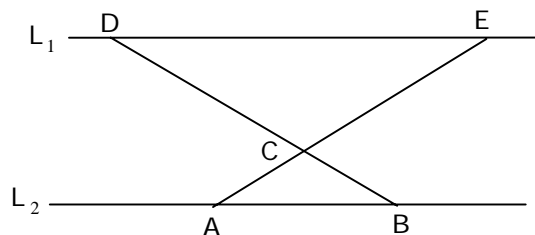


Fig. 4

TEOREMA 2

Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan **un ángulo congruente comprendido entre lados proporcionales**.

O sea, en la figura 1:

Si $\angle A \cong \angle P$ y $\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

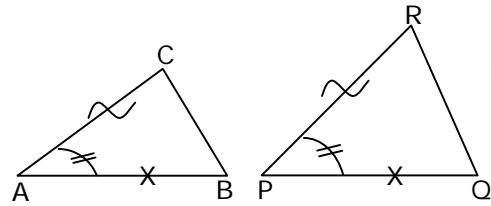


Fig. 1

TEOREMA 3

Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan **sus lados proporcionales**.

O sea, en la figura 2:

Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{RP}}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

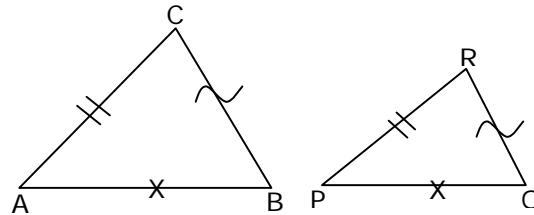


Fig. 2

TEOREMA 4

Para que dos triángulos sean semejantes, basta que **tengan dos de sus lados respectivamente proporcionales, y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados, congruentes**.

O sea, en la figura 3:

Si $\angle C \cong \angle R$ y $\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

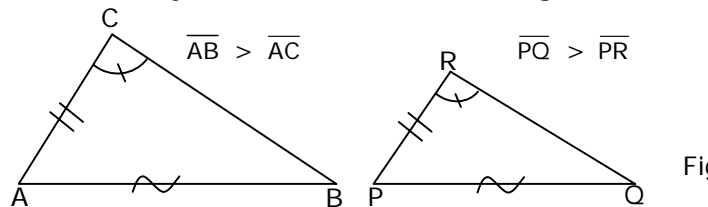


Fig. 3

EJEMPLOS

1. Sea $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y las longitudes de los lados sean las indicadas en la figura 4. ¿Cuál es la longitud de $(x + y)$?

- A) $\frac{21}{4}$
- B) $\frac{27}{4}$
- C) $\frac{30}{4}$
- D) $\frac{51}{4}$
- E) $\frac{61}{4}$

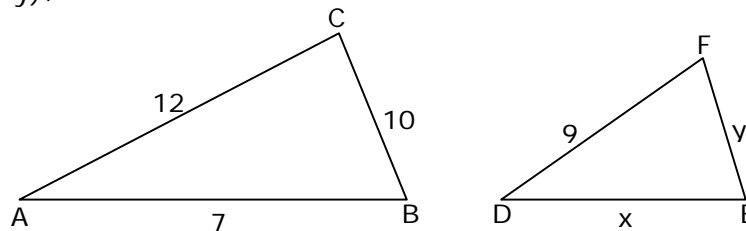


Fig. 4

2. Según los datos dados en la figura 5, ¿cuál es la longitud de \overline{AC} si $\frac{\overline{AB}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PQ}}$?

- A) 10
- B) 8
- C) 6
- D) 3,9
- E) 1,3

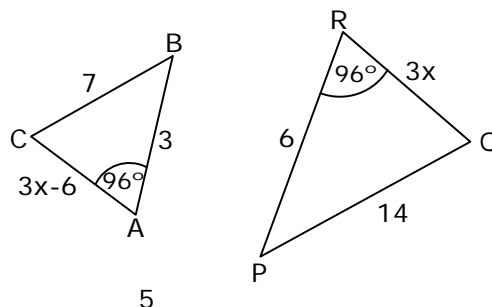


Fig. 5

De acuerdo a los elementos de la figura 1, se cumplen los siguientes teoremas:

TEOREMA 5

En triángulos semejantes, dos lados homólogos están en la misma razón que dos trazos homólogos cualesquiera y también están en la misma razón que sus perímetros..

$$\frac{b}{b'} = \frac{t_c}{t_{c'}} = \frac{h_a}{h_{a'}} = \dots$$

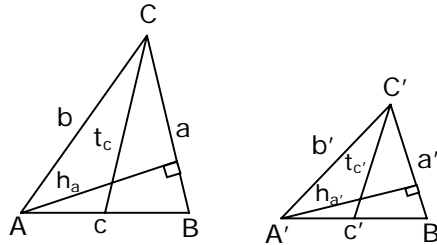


Fig. 1

TEOREMA 6

Las áreas de triángulos semejantes están en una razón equivalente al cuadrado de la razón en que se encuentran dos trazos homólogos cualesquiera.

$$\frac{A}{A'} = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{t_c}{t_{c'}}\right)^2 = \left(\frac{h_a}{h_{a'}}\right)^2 = \dots$$

TEOREMA 7

En el triángulo ABC, de la figura 2, \overline{AM} y \overline{BN} son transversales de gravedad, como el $\triangle ABG \sim \triangle MNG$ entonces se cumple que:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GN}} = 2$$

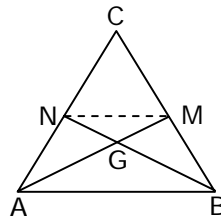


Fig. 2

EJEMPLOS

1. En la figura 3, el trazo \overline{DE} es paralelo al lado \overline{AB} del triángulo ABC. ¿Cuál es el perímetro del $\triangle CDE$?

- A) 36
- B) 32
- C) 27
- D) 21
- E) 18

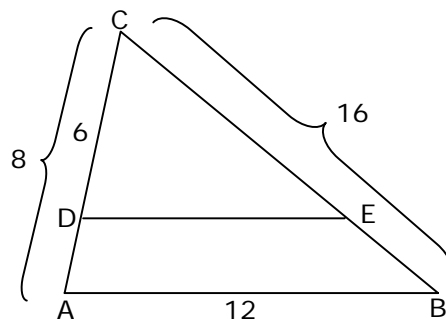
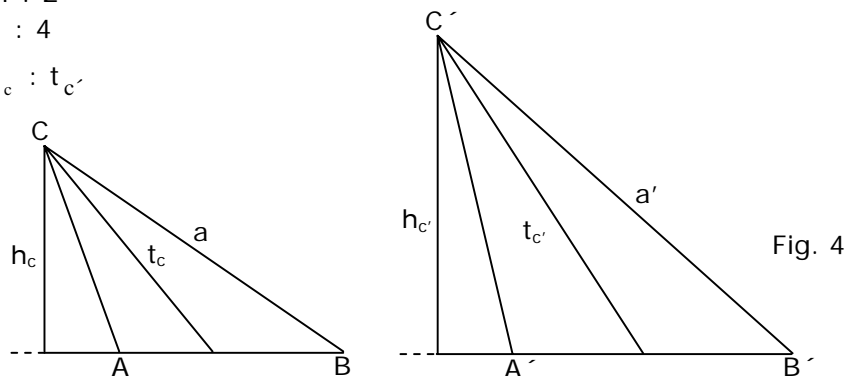


Fig. 3

2. Los triángulos ABC y A'B'C' de la figura 4, son **semejantes**. S y S' representan las áreas del primer y segundo triángulo respectivamente. Si $S : S' = 1 : 4$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) **FALSA(S)**?

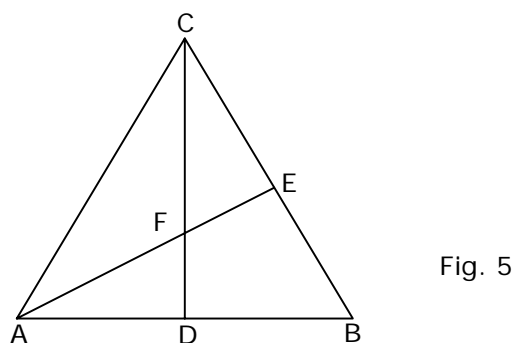
- I) $a : a' = 1 : 2$
- II) $h_c : h_{c'} = 1 : 4$
- III) $h_c : h_{c'} = t_c : t_{c'}$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y III
- E) I, II y III



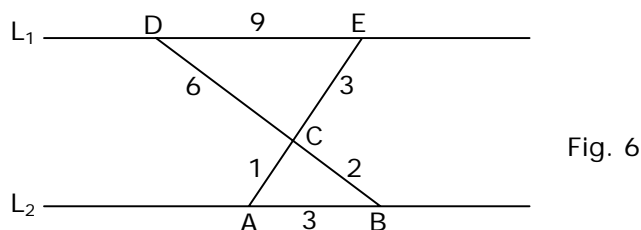
3. El triángulo de la figura 5, es equilátero de lado $10\sqrt{3}$ cm, \overline{CD} y \overline{AE} son transversales de gravedad, entonces $\overline{CF} + \overline{BE}$ mide

- A) $15\sqrt{3}$ cm
- B) $(5 + 5\sqrt{3})$ cm
- C) $(10 + 5\sqrt{3})$ cm
- D) $(10 + 2\sqrt{3})$ cm
- E) $(5 + 10\sqrt{3})$ cm



4. Las rectas L_1 y L_2 de la figura 6, son paralelas y los trazos \overline{DB} y \overline{AE} se cortan en C. ¿Cuál es la razón entre el área del ΔABC y el área del ΔEDC ?

- A) 1 : 3
- B) 6 : 18
- C) 3 : 6
- D) 3 : 9
- E) 1 : 9



TEOREMAS DE EUCLIDES

El triángulo de la figura 1 es rectángulo en C y \overline{CD} es altura.

a y b: catetos

c: hipotenusa

p y q: proyecciones de los catetos a y b respectivamente

Los triángulos ACB, ADC y CDB son semejantes.

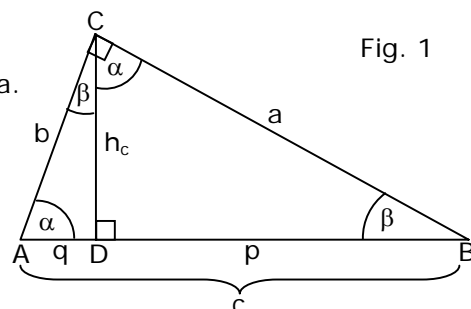


Fig. 1

- Referente a la altura:** En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional geométrica entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

$$h_c^2 = p \cdot q$$

- Referente a los catetos:** En todo triángulo rectángulo cada cateto es media proporcional geométrica entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.

$$a^2 = p \cdot c$$

$$b^2 = q \cdot c$$

EJEMPLOS

- Según los datos proporcionados por la figura 2, el valor de x es

- A) 36
- B) 28
- C) 13
- D) 5
- E) 2,25

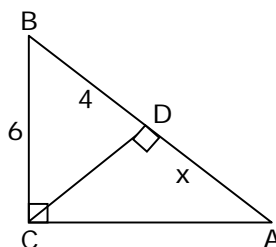


Fig. 2

- En el ΔABC de la figura 3, \overline{CD} es altura. ¿Cuál es la medida del cateto \overline{BC} ?

- A) 48
- B) 16
- C) $4\sqrt{3}$
- D) 6
- E) 4

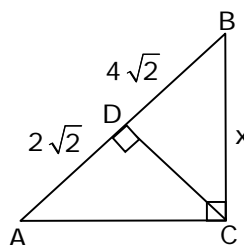


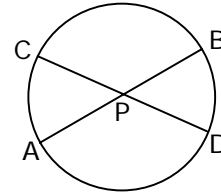
Fig. 3

PROPORCIONALIDAD EN LA CIRCUNFERENCIA

Teorema de las cuerdas:

Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, el producto de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de segmentos determinados en la otra.

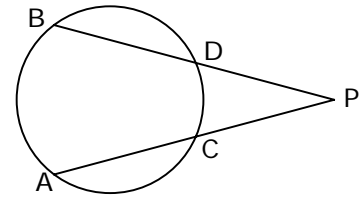
$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$



Teorema de las secantes:

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una de ellas por su segmento exterior es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior.

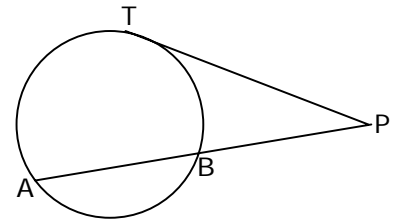
$$\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$$



Teorema de la tangente y la secante

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional geométrica entre la secante y su segmento exterior.

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$



EJEMPLOS

1. En la circunferencia de centro O (fig. 1), \overline{AB} y \overline{CD} son cuerdas que se intersectan en P. Si $\overline{AP} = 9$ cm, $\overline{PB} = 12$ cm y $\overline{CP} = 18$ cm, entonces \overline{PD} mide

- A) 24 cm
- B) 21 cm
- C) 13,5 cm
- D) 6 cm
- E) 3 cm

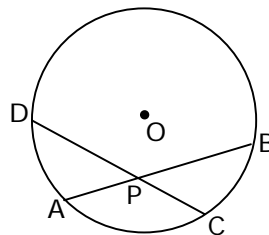


Fig. 1

2. En la figura 2, \overline{PS} y \overline{PU} son secantes a la circunferencia de centro O. Si $\overline{PR} = \overline{RS} = 14$ y $\overline{PT} = 8$, entonces \overline{TU} es igual a

- A) 8
- B) 14
- C) 20
- D) 33
- E) 41

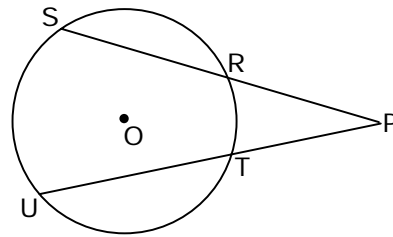


Fig. 2

3. En la circunferencia de centro O (figura 3), \overline{MN} es tangente en N y \overline{MS} es secante. Si $\overline{MR} = 3$ cm y $\overline{RS} = 45$ cm, entonces la tangente \overline{MN} mide

- A) 12 cm
- B) 21 cm
- C) 36 cm
- D) 45 cm
- E) 144 cm

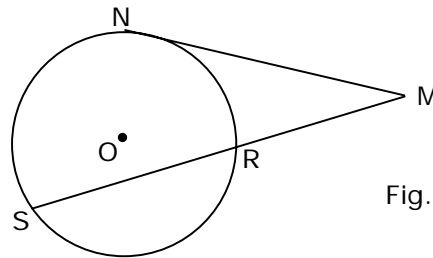


Fig. 3

4. En la figura 4, $\overline{AD} = 16$ cm y $\overline{DC} = 9$ cm. Si el segmento \overline{DE} es paralelo a la tangente \overline{BC} , ¿cuál es la medida del segmento \overline{DE} ?

- A) 20 cm
- B) 12 cm
- C) 9,6 cm
- D) $8\sqrt{2}$ cm
- E) 3,2 cm

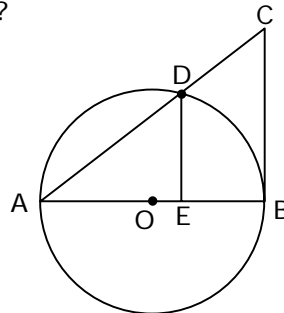


Fig. 4

EJERCICIOS

- Si las diagonales de dos cuadrados miden $3\sqrt{2}$ y $4\sqrt{2}$ respectivamente, entonces sus perímetros están en la razón
 - $3 : 4$
 - $3 : \sqrt{2}$
 - $2 : \sqrt{3}$
 - $\sqrt{3} : 2$
 - Ninguna de las anteriores
- Los perímetros de dos polígonos semejantes miden 20 cm y 28 cm respectivamente. Si un lado del polígono menor mide 4 cm, ¿cuál es la longitud del lado homólogo del polígono mayor?
 - 4,5 cm
 - 5,0 cm
 - 5,6 cm
 - 6,0 cm
 - 7,0 cm

- Si en la figura 1, $L_1 \parallel L_2$, entonces el valor de x es

- 2
- 2
- $\frac{3}{2}$
- $\frac{9}{2}$
- 1

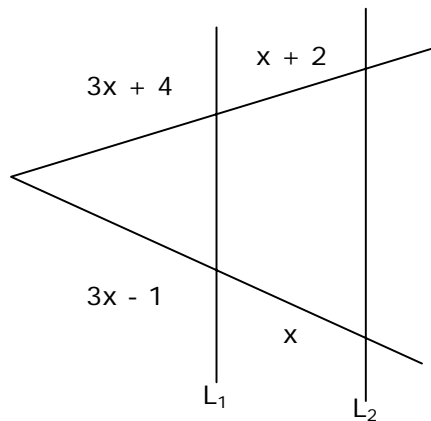


Fig. 1

- Las rectas L_1 y L_2 de la figura 2, son paralelas y los trazos DB y AE se cortan en C . Si $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{AB} = 10$ cm y $\overline{CE} = 9$ cm, entonces $\overline{ED} =$

- 12 cm
- 13 cm
- 14 cm
- 15 cm
- 18 cm

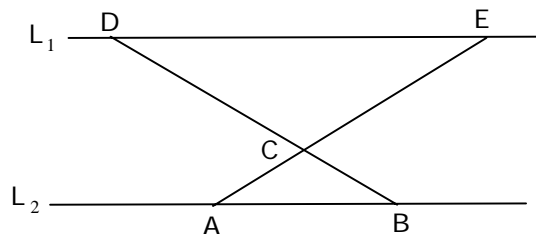


Fig. 2

5. En la figura 3, el trazo \overline{DE} es paralelo al lado \overline{AC} del triángulo $\triangle ABC$. Si $\overline{AB} = 14$ cm, $\overline{AC} = 21$ cm y $\overline{AE} = 8$ cm, entonces $\overline{DE} =$

- A) 6 cm
- B) 7 cm
- C) 8 cm
- D) 9 cm
- E) 12 cm

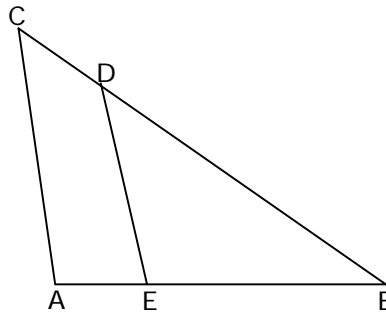


Fig. 3

6. En la figura 4, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. Entonces, el valor que le corresponde al punto P es

- A) $\frac{16}{15}$
- B) $\frac{8}{15}$
- C) $\frac{26}{15}$
- D) $\frac{9}{10}$
- E) $\frac{1}{3}$

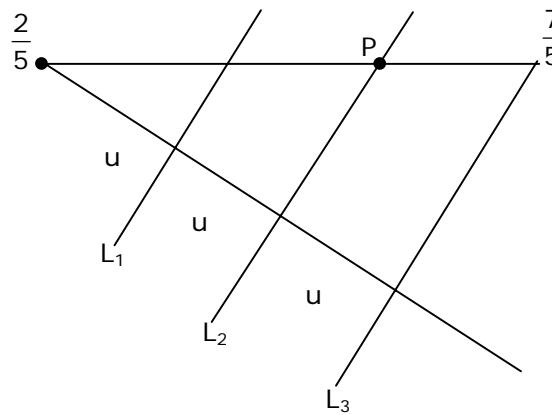


Fig. 4

7. En el triángulo $\triangle ABC$ de la figura 5, \overline{PQ} es tal que el $\triangle CPQ$ es congruente con el $\triangle CBA$. Si $\overline{AB} = 15$ cm, $\overline{AC} = 18$ cm y $\overline{PQ} = 5$ cm, entonces $\overline{CQ} =$

- A) 6 cm
- B) 5 cm
- C) 4 cm
- D) 3 cm
- E) 2 cm

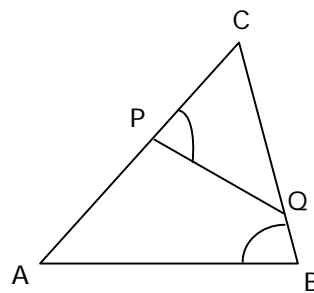


Fig. 5

8. En el triángulo $\triangle ABC$ de la figura 6, se ha trazado \overline{CE} tal que $\angle ECB = \angle BAC$. Si $\overline{AB} = 5$ cm y $\overline{BC} = 4$ cm, entonces $\overline{AE} =$

- A) 1,25 cm
- B) 1,8 cm
- C) 2,5 cm
- D) 3,2 cm
- E) Ninguna de las anteriores

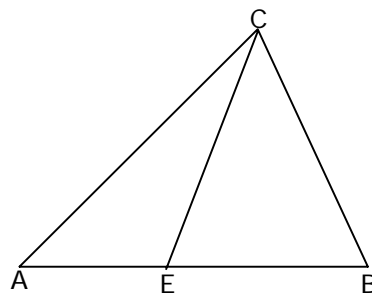


Fig. 6

9. En la figura 7, ABCD es un trapecio de bases \overline{AB} y \overline{CD} . Si $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ y $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{1}{3}$, entonces, ¿cuál es la medida de \overline{FC} , si $\overline{BC} = 30$ cm?

- A) 10 cm
 B) 15 cm
 C) 30 cm
 D) 25 cm
 E) 20 cm

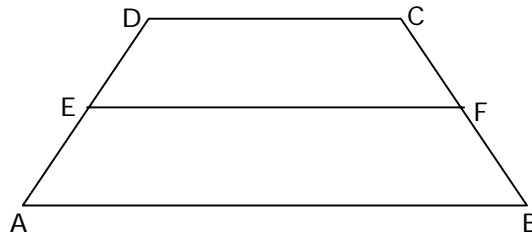


Fig. 7

10. En el ΔPQR de la figura 8, $\overline{PR} \perp \overline{RQ}$, $\overline{RS} \perp \overline{PQ}$, $\angle PRS = 30^\circ$ y $\overline{PS} = 4$. Entonces, $\overline{SQ} =$

- A) 18
 B) 6
 C) 15
 D) 12
 E) 9

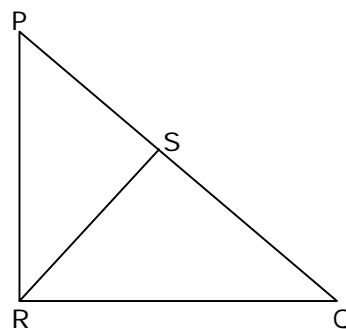


Fig. 8

11. En el ΔPQR (fig. 9), $\overline{ST} \perp \overline{PQ}$, $\overline{QS} \perp \overline{PR}$ y $\overline{RQ} \perp \overline{PQ}$, entonces cuál(es) de las siguientes relaciones es(son) verdadera(s)?

- I) $\Delta PQR \sim \Delta QSR$
 II) $\Delta PTS \sim \Delta STQ$
 III) $\Delta QRS \sim \Delta PST$

- A) Sólo I
 B) Sólo I y II
 C) Sólo I y III
 D) Sólo II y III
 E) I, II y III

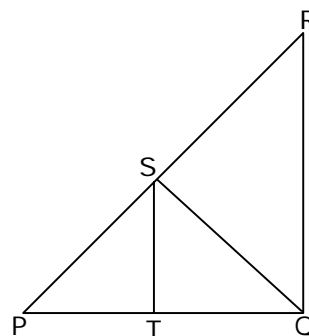


Fig. 9

12. En el ΔABC de la figura 10, la altura h_c mide 8 cm y los segmentos que ella determina sobre la hipotenusa están en la razón 4 : 1. ¿Cuánto suman estos dos segmentos?

- A) 64 cm
 B) 20 cm
 C) 16 cm
 D) 12 cm
 E) 40 cm

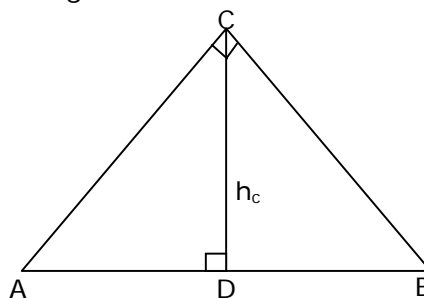


Fig. 10

13. Un método para determinar la altura de un objeto, consiste en colocar un espejo en el suelo y después, situarse de manera que la parte más alta del objeto pueda verse en el espejo. La figura 11 muestra un boy-scout (A) de 160 cm de estatura que se encuentra a 2 metros de un espejo, y éste a 6 m de un pino (B). ¿Cuál es la altura del pino?

- A) 4,8 m
 B) 5,4 m
 C) 6,4 m
 D) 6,0 m
 E) Ninguna de las anteriores

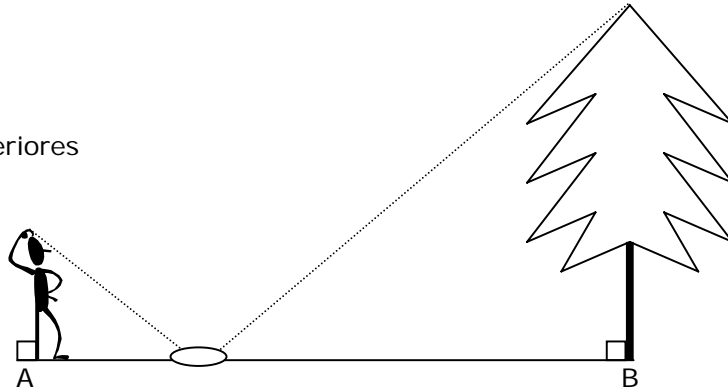


Fig. 11

14. El triángulo ABC de la figura 12, es rectángulo en C, y \overline{CD} es altura. Si $\overline{BD} = 1$ y $\overline{AB} = 9$, entonces $\overline{AC} =$

- A) $\sqrt{3}$
 B) 2
 C) 3
 D) $2\sqrt{2}$
 E) $6\sqrt{2}$

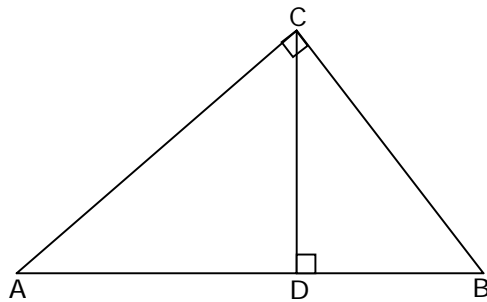


Fig. 12

15. En la figura 13, \overline{PQ} y \overline{ST} representan a 2 pinos. Una lechuza que estaba posada en P, voló 40 metros en forma rectilínea hasta el punto R donde atrapó un ratón, y luego alzó vuelo, también en forma rectilínea y recorriendo 30 metros, se posó con su presa en S. Si el pino PQ mide 28 metros, ¿cuánto mide el pino ST?

- A) 10,5 metros
 B) 14 metros
 C) 21 metros
 D) 22,5 metros
 E) $\frac{28}{3}$ metros

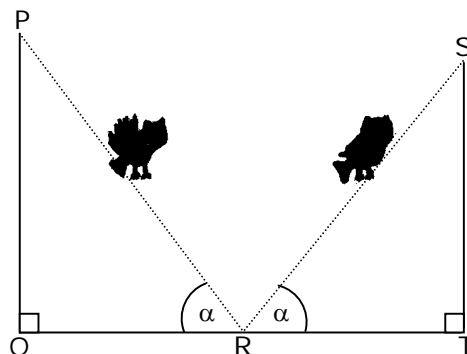


Fig. 13

16. Un avión de combate vuela a 3.000 m de altura (figura 14). En el momento preciso en que vuela sobre el punto P ubicado en tierra, se le lanza un cohete desde este punto, impactando al avión en el punto Q. Si $\overline{BC} = 1.500$ m, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- I) El avión recorrió de A a B, lo mismo que de B a Q.
 II) El cohete viajó de P a Q el doble de lo que viajó el avión de A a Q.
 III) El impacto se produjo porque el cohete viajó con la misma rapidez que el avión.

- A) Sólo I
 B) Sólo II
 C) Sólo I y II
 D) Sólo I y III
 E) Ninguna es verdadera

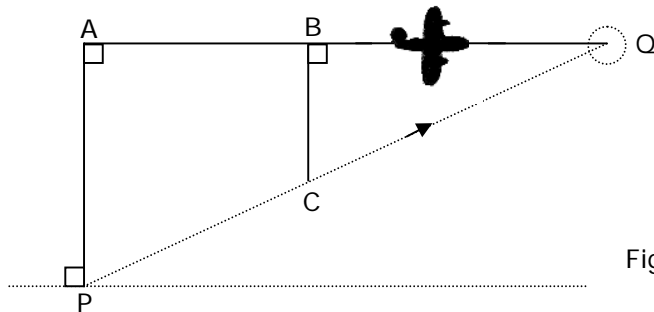


Fig. 14

17. En la figura 15, se tiene un rectángulo NMPQ inscrito en un triángulo rectángulo ABC. Si $\overline{AB} = 20$, $\overline{AM} = 4$ y $\overline{NB} = 9$, entonces el perímetro del rectángulo MNPQ es

- A) 18
 B) 20
 C) 24
 D) 26
 E) 30

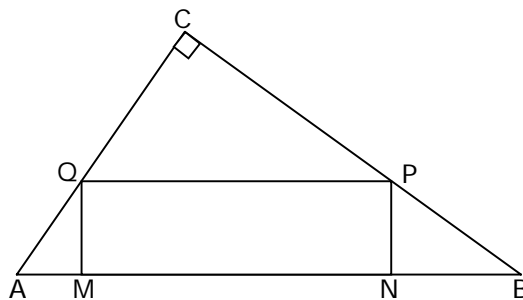


Fig. 15

18. Las circunferencias de centros O y P son tangentes exteriormente en T (figura 16); \overline{RT} es tangente, \overline{RW} y \overline{RX} son secantes. Si $\overline{RX} = 16$ cm, $\overline{RS} = 5$ cm, $\overline{RN} = 8$ cm, entonces \overline{RW} mide

- A) Faltan datos para determinarlo
 B) 26 cm
 C) 18 cm
 D) 16 cm
 E) 10 cm

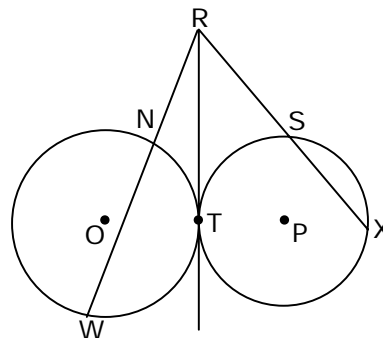


Fig. 16

19. El triángulo PQR es rectángulo en R (fig. 17). Si $\overline{ST} \perp \overline{PQ}$ se puede saber cuánto mide \overline{ST} si se sabe cuánto miden:

- (1) \overline{PR} , \overline{PQ} y \overline{QT}
- (2) \overline{SQ} , \overline{RT} y \overline{PS}
- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

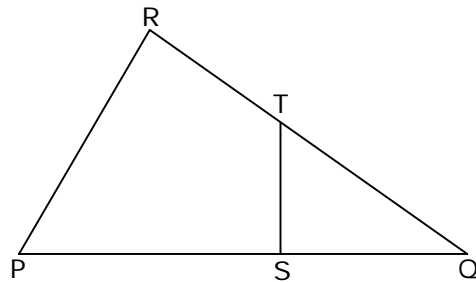


Fig. 17

20. ABCD es un cuadrado (fig. 18). $\triangle AFE$ es semejante con $\triangle FCG$ si:

- (1) $\overline{EF} \perp \overline{FG}$
- (2) EFGD es un rectángulo.
- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

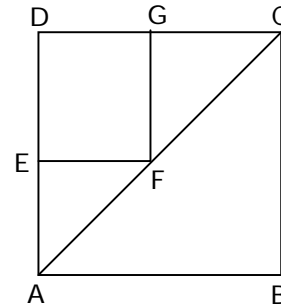


Fig. 18

RESPUESTAS

Ejemplos Págs.	1	2	3	4
1 y 2	E	D	D	B
3	A	B		
4	C	B		
5	D	C		
6 y 7	C	B	C	E
8	D	C		
9 y 10	D	E	A	C

CLAVES PÁG. 11

- 1. A 6. A 11. E 16. A
- 2. C 7. A 12. B 17. D
- 3. B 8. B 13. A 18. E
- 4. D 9. E 14. E 19. D
- 5. D 10. D 15. C 20. B