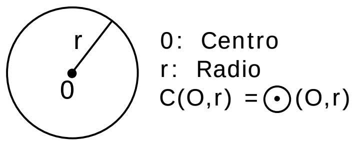
GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 20

UNIDAD: GEOMETRÍA

CIRCUNFERENCIA - ÁNGULOS

DEFINICIONES

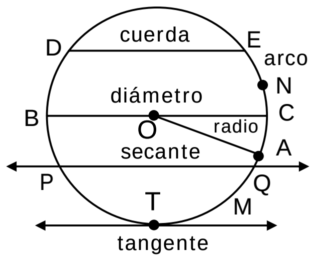
CIRCUNFERENCIA: Dado un **punto 0** y una **distancia r**, se llama **circunferencia** de centro **0** y radio **r** al conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia **r** del punto **0**.



RADIO: Trazo cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de ésta. ($\overline{OA}$)

CUERDA: Trazo cuyos extremos son dos puntos de una circunferencia. ($\overline{DE}$)

DIÁMETRO: Cuerda que contiene al centro de la circunferencia. ($\overline{BC}$).



SECANTE: Recta que intersecta en dos puntos a la circunferencia ($\overleftrightarrow{PQ}$)

TANGENTE: Recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto ($\overleftrightarrow{TM}$), T punto de tangencia.

ARCO: Es una parte de la circunferencia determinada por dos puntos distintos de ella ($\overset{\frown}{CNE}$).

EJEMPLO

1. ¿Cuál(es) de las siguiente aseveraciones es(son) **siempre** verdadera(s)?

   I) Tres puntos distintos y no colineales determinan una circunferencia.
   II) El diámetro es la cuerda de mayor longitud.
   III) La medida de las longitudes de un arco y de la cuerda que la subtiende son de igual valor.

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo I y II
   D) Sólo I y III
   E) I, II y III

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

ÁNGULO DEL CENTRO: Es todo ángulo interior cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son radios de la misma. (Ej. $\measuredangle$ DOE) (fig.1).

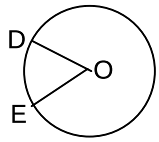


Fig. 1

O :centro de la circunferencia

MEDIDA ANGULAR DE UN ARCO: En toda circunferencia la medida angular de un arco es igual a la medida del ángulo del centro que subtiende dicho arco.

En fig. 1 $\boxed{\overset{\frown}{DE} = \measuredangle DOE}$

ÁNGULO INSCRITO: Es todo ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y parte de sus rayos son cuerdas de ésta. (Ej. $\measuredangle$ GHF) (fig. 2).

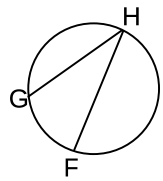
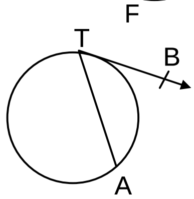


Fig. 2

ÁNGULO SEMI-INSCRITO: Es todo ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus rayos es tangente a la circunferencia justo en el vértice y parte del otro en una cuerda de ella. (Ej. $\measuredangle$ BTA) (fig. 3).



$\overrightarrow{TB}$:tangente en T

Fig. 3

EJEMPLOS

1. En la circunferencia de centro O de la figura 1, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

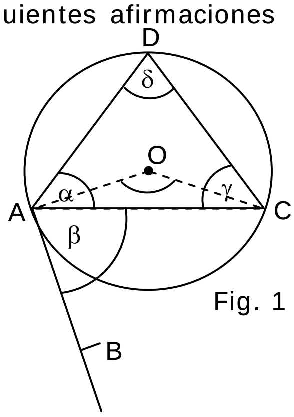


Fig. 1

I) El ángulo inscrito en el arco $\overset{\frown}{CDA}$ es δ.

II) El ángulo β es semi-inscrito, si $\overrightarrow{AB}$ es tangente en A.

III) La medida del arco $\overset{\frown}{AC}$ es de igual valor que el $\measuredangle$ AOC.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

2. En la circunferencia de centro O (figura 2), se cumple que $\overset{\frown}{BA} \cong \overset{\frown}{DC}$ y $\overset{\frown}{AED} + \overset{\frown}{BC} = 3\overset{\frown}{AB}$. Entonces, la medida del $\measuredangle$ x es

A) 45º
B) 60º
C) 72º
D) 84º
E) 90º

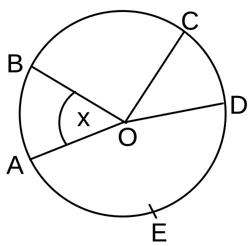


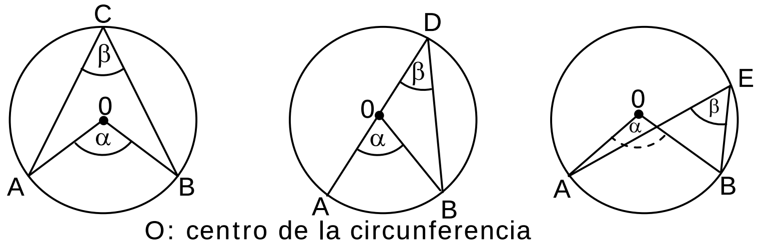
Fig. 2

TEOREMAS REFERENTES A ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA 1

Todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene como medida la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

$$\beta = \frac{1}{2}\,\alpha$$

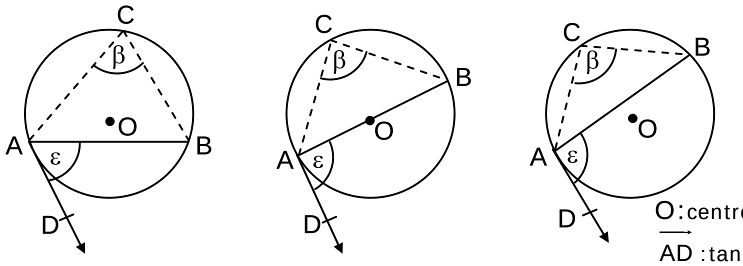


O: centro de la circunferencia

TEOREMA 2

Todo ángulo semi-inscrito en una circunferencia tiene igual medida que cualquier ángulo inscrito que subtienda el mismo arco.

$$\varepsilon = \beta$$



O: centro de la circunferencia

$\overrightarrow{AD}$: tangente en A

EJEMPLOS

1. En la circunferencia de centro O (fig. 1), $\overline{AB}$ es diámetro. Entonces, el valor de α es

   A) 10º
   B) 20º
   C) 40º
   D) 80º
   E) 140º

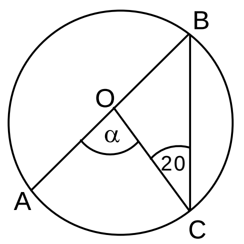


Fig. 1

2. En la circunferencia de la figura 2, está inscrito el ΔABC y la recta $\overleftrightarrow{PA}$ es tangente en el punto A. Si $\angle$ CAB = 50º y $\angle$ CAP = 72º, entonces $\angle$ ACB =

   A) 116º
   B) 90º
   C) 72º
   D) 58º
   E) 40º

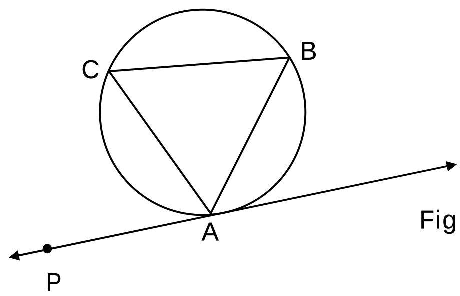
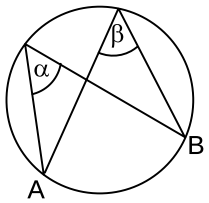


Fig. 2

TEOREMA 3

Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden un mismo arco tienen igual medida

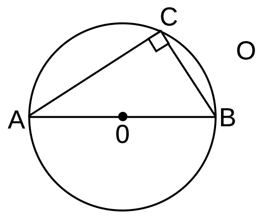
$\boxed{\alpha = \beta}$



TEOREMA 4

Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

$\boxed{\measuredangle\ ACB = 90º}$

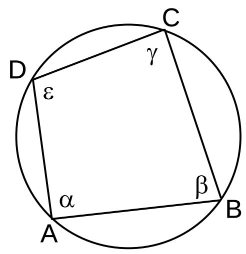


O: centro de la circunferencia

TEOREMA 5

En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia los ángulos opuestos son suplementarios.

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha + \gamma = 180º \\ \beta + \varepsilon = 180º\end{array}}$$



EJEMPLOS

1. En el cuadrilátero inscrito en la circunferencia de la figura 1, $\alpha - \beta = 120º$. Si $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, ¿cuánto mide el ángulo x?

   A) 30º
   B) 75º
   C) 105º
   D) 150º
   E) 155º

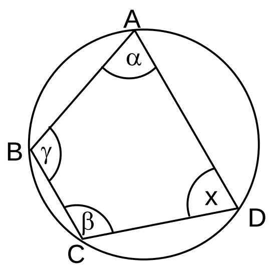


Fig. 1

2. En la circunferencia de centro O de la figura 2, $\overline{AB}$ es diámetro y $\overset{\frown}{CA} \cong \overset{\frown}{BD}$. Si $\overset{\frown}{CA} = 3m + 10$ y el $\measuredangle ADC = 3m - 10$, entonces $\measuredangle x + \measuredangle y$ =

   A) 170º
   B) 160º
   C) 150º
   D) 140º
   E) 120º

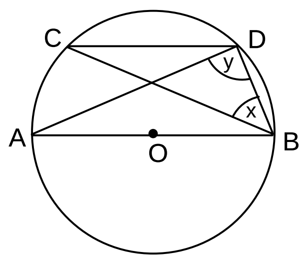


Fig. 2

EJERCICIOS

1. En la circunferencia de centro O de la figura 1, $\angle$ BAC + $\angle$ BDC = 80º. Entonces, $\angle$ BOC mide

   A) Falta información
   B) 80º
   C) 60º
   D) 40º
   E) 20º

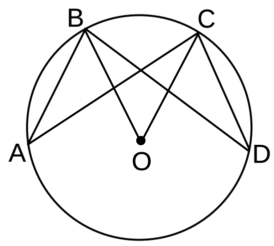


Fig. 1

2. O es centro de la circunferencia de la figura 2, y QROP es cuadrado. ¿Cuánto mide el ángulo RSP?

   A) 22,5º
   B) 30º
   C) 45º
   D) 60º
   E) 90º

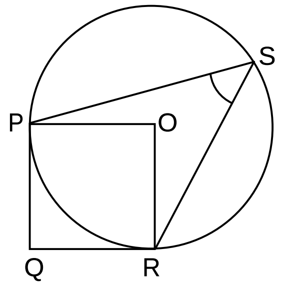


Fig. 2

3. En la circunferencia de centro O, $\angle$ BCD = 125º (fig. 3). Entonces, $\angle$ BAD mide

   A) 55º
   B) 60º
   C) 45º
   D) 65º
   E) No se puede determinar

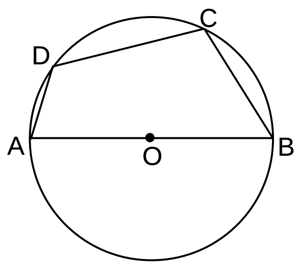


Fig. 3

4. En la circunferencia de centro O, $\angle$ DCB = 130º (fig. 4). Entonces, la medida del ángulo **x** es

   A) Faltan datos para determinarlo
   B) 40º
   C) 55º
   D) 65º
   E) 70º

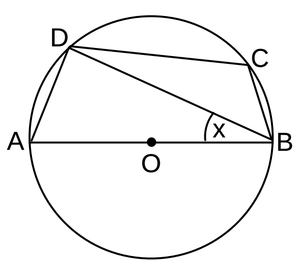


Fig. 4

5. En la circunferencia de centro O (fig. 5), $\angle$ AOB = 2$\angle$ ABD. ¿Cuánto mide el ángulo ACB?

A) 22,5º
B) 30º
C) 40º
D) 45º
E) 90º

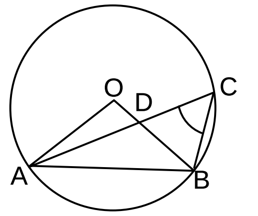


Fig. 5

6. En la circunferencia de centro O de la figura 6, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ son secantes. Si α = 80º y β = 50º, $\angle$ x =

A) 65º
B) 75º
C) 90º
D) 100º
E) 130º

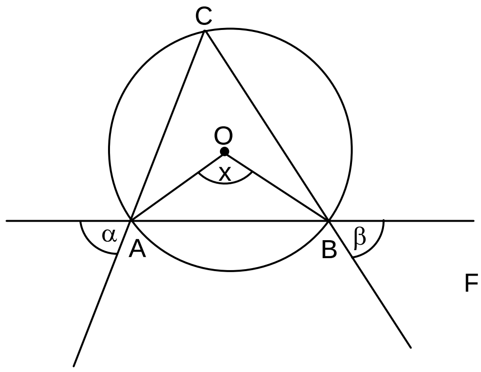


Fig. 6

7. O es centro de la circunferencia de la figura 7, $\angle$ POQ = $\angle$ QOR = $\angle$ ROS y $\angle$ RSO = 72º. ¿Cuánto mide el ángulo PTQ?

A) 54º
B) 36º
C) 35º
D) 27º
E) 18º

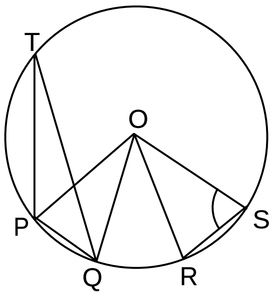


Fig. 7

8. $\overset{\frown}{BC}$ es un cuarto de circunferencia con centro en A (fig. 8). Si $\overline{BD} = \overline{AB}$, entonces $\angle$ DAC mide

A) 15º
B) 30º
C) 45º
D) 60º
E) 75º

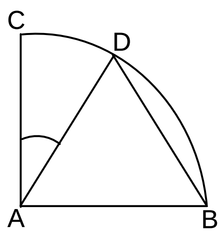


Fig. 8

9. $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ son diámetros de la circunferencia de centro O (fig. 9). Si $\angle$ AOB = 2 · $\angle$ BOC, entonces el $\angle$ BDC mide

A) 30º
B) 45º
C) 60º
D) 120º
E) No se puede determinar

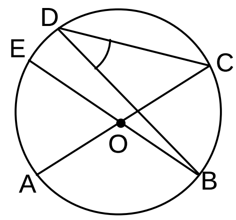


Fig. 9

10. En la figura 10, la circunferencia tiene centro en O. El valor del ángulo x es

A) 12,25º
B) 12,5º
C) 25º
D) 37,5º
E) 50º

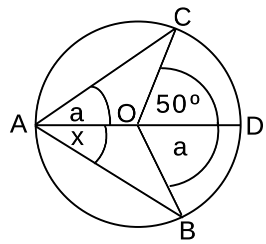


Fig. 10

11. La circunferencia de la figura 11, tiene centro en O. Si el ángulo inscrito ACB mide 20º, ¿cuál es el valor del $\angle$ ABO?

A) 70º
B) 40º
C) 35º
D) 20º
E) 10º

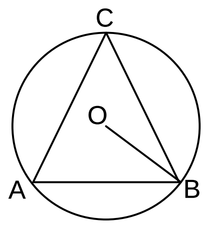
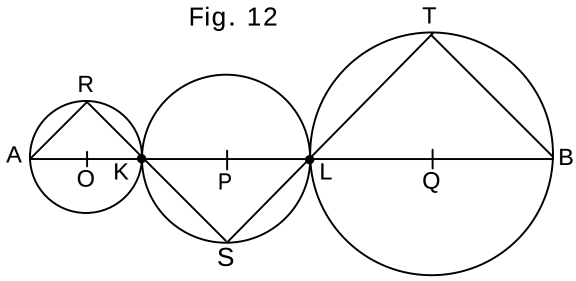


Fig. 11

12. En la figura 12, las circunferencias son tangentes en K y L. La recta $\overline{AB}$ pasa por los centros O, P y Q. Los puntos R, S y T están en las respectivas circunferencias. Si la medida del $\angle$ RAK es 60º, entonces la medida del $\angle$ TBQ es

A) 20º
B) 30º
C) 45º
D) 60º
E) Falta información

Fig. 12


13. O_1 es el centro de la circunferencia que pasa por P, Q y M. O_2 es el centro de la circunferencia que pasa por P, Q y O_1 (fig. 13). Si $\angle$ PMQ = x, entonces la medida del $\angle$ y está expresada por

A) $2x - \frac{x}{2}$
B) $2x$
C) $2x + \frac{x}{2}$
D) $3x$
E) $4x$

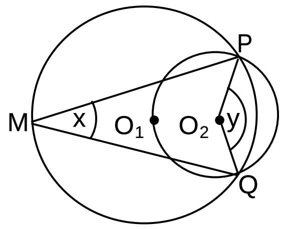


Fig. 13

14. En la circunferencia de centro O de la figura 14, se puede conocer el valor de **x** si:

(1) $\overset{\frown}{CA} = 110º$
(2) $\angle$ ACB + $\angle$ ADB = 70º

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

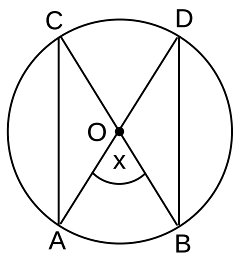


Fig. 14

15. En la circunferencia de centro O (fig. 15), $\overline{AB}$ es diámetro. Se puede determinar la medida del ángulo CDO si se sabe que:

(1) $\overline{CD}$ // $\overline{AB}$
(2) $\angle$ COA = $\angle$ DOB

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

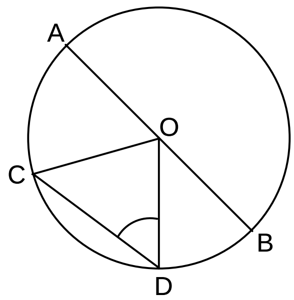


Fig. 15

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2
1	C	
2	E	C
3	C	D
4	C	D

CLAVES PÁG. 5

1. B	6. D	11. A
2. C	7. E	12. B
3. A	8. B	13. E
4. B	9. A	14. D
5. D	10. B	15. E