CURSO: MATEMÁTICA

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 34

UNIDAD: GEOMETRÍA

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO-ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

Determinación del plano:

Un plano queda determinado por:

- Dos rectas que se intersectan (fig. 1).

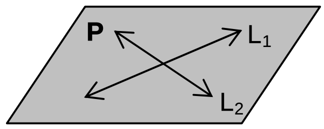


Fig. 1

- Tres puntos no colineales (fig. 2).

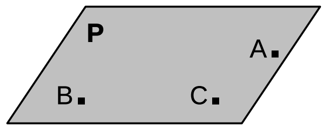


Fig. 2

- Por una recta y un punto no perteneciente a ella (fig. 3).

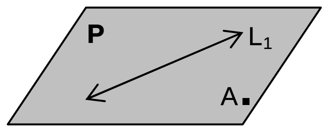


Fig. 3

- Por dos rectas paralelas (fig. 4).

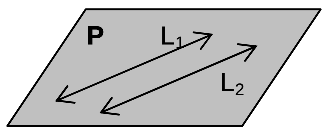


Fig. 4

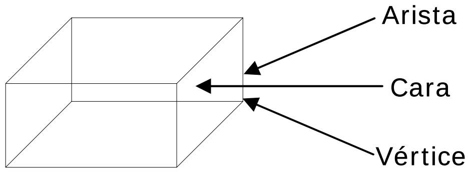
EJEMPLO

1. ¿Cuál de las siguientes alternativas es falsa?

   A) Un plano está determinado por una recta y un punto de perteneciente a la recta.
   B) Un plano está determinado por los cuatro vértices de un cuadrilátero.
   C) Un plano está determinado por dos rectas perpendiculares.
   D) Un plano está determinado por dos lados no consecutivos de un rombo.
   E) Un plano está determinado por los vértices de un triángulo rectángulo.

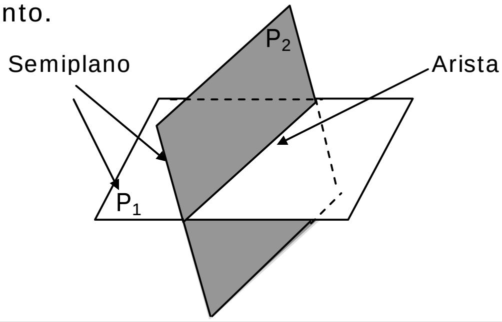
DEFINICIONES

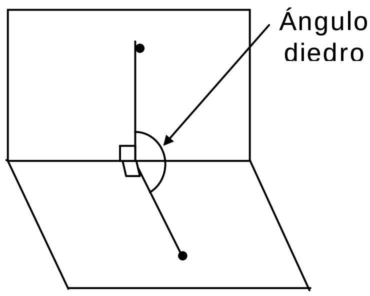
Poliedro: Cuerpo limitado por cuatro o más polígonos donde cada polígono se denomina **cara**, sus lados son **aristas** y la intersección de las aristas se llaman **vértices**.



Prisma: Poliedro limitado por paralelogramos (caras laterales del prisma) y dos polígonos congruentes cuyos planos son paralelos (bases de prisma).

ÁNGULO DIEDRO: Es el ángulo formado por dos semiplanos, que tienen una arista común y su medida es el ángulo rectilíneo formado por dos rectas perpendiculares a la arista en un mismo punto.





EJEMPLOS

1. ¿Cuánto mide el ángulo diedro formado por los planos P_1 y P_2 que se cortan perpendicularmente en la figura 1?

   A) 30º
   B) 45º
   C) 54º
   D) 90º
   E) 108º

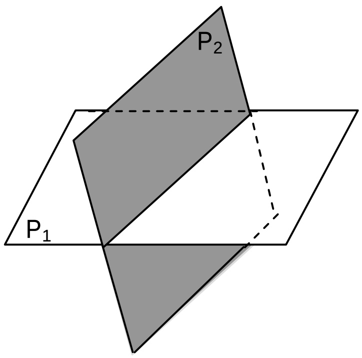


Fig. 1

2. ¿Cuánto mide el ángulo diedro formado por las caras laterales del prisma de la figura 2, cuya base es un pentágono regular?

   A) 30º
   B) 45º
   C) 54º
   D) 90º
   E) 108º

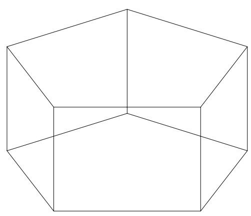
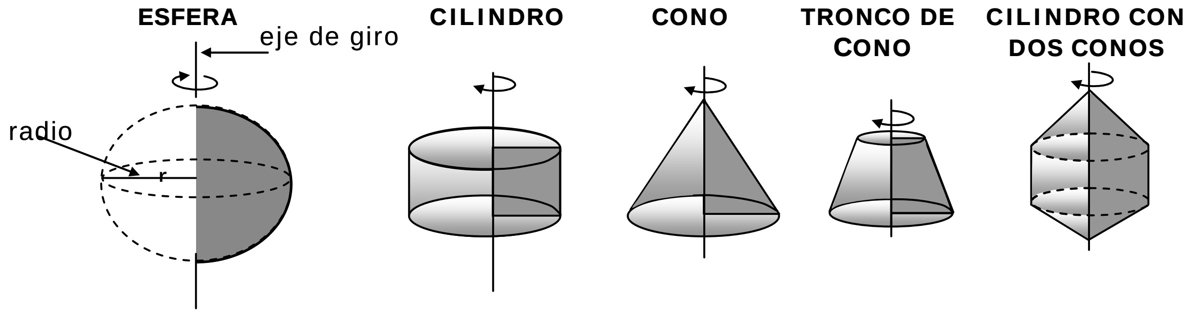


Fig. 2

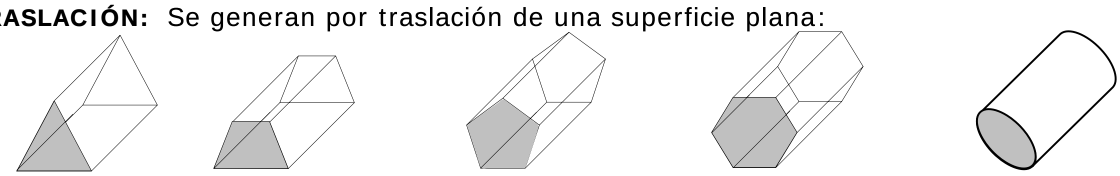
CUERPOS GENERADOS POR ROTACIÓN O TRASLACIÓN DE FIGURAS PLANAS

ROTACIÓN CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Los cuerpos de revolución se obtienen haciendo girar una superficie plana alrededor de un eje



TRASLACIÓN: Se generan por traslación de una superficie plana:



Prisma triangular | Prisma trapezoidal | Prisma pentagonal | Prisma hexagonal | Cilindro circular recto

EJEMPLOS

1. Dado un triángulo ABC, rectángulo en C (figura 1). ¿Cuál es el cuerpo generado por la rotación de dicho triángulo en torno a su hipotenusa?

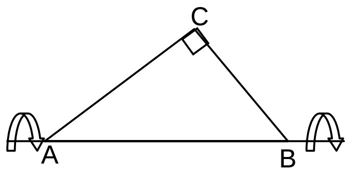
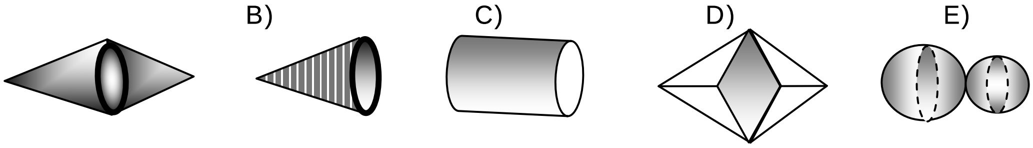


Fig. 1

A) B) C) D) E)



2. En la figura 2, se muestra un cuerpo de revolución. Este cuerpo puede ser generado por la rotación de la región

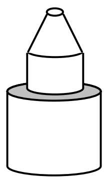
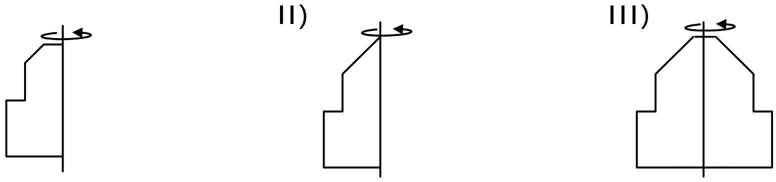


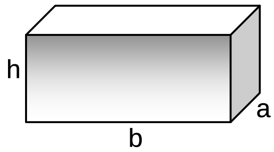
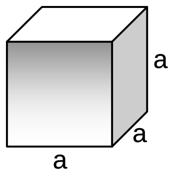
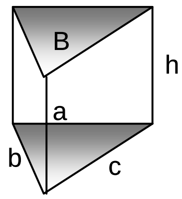
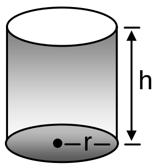
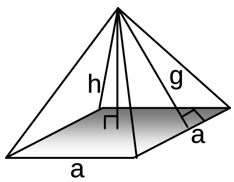
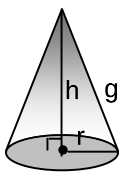
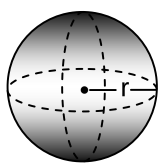
Fig. 2

I) II) III)



A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) Sólo I y II E) Sólo I y III

CUADRO RESUMEN DE ÁREAS Y VOLUMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

NOMBRE	FORMA	ÁREA	VOLUMEN
PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR		2(ab +bh + ah)	$a \cdot b \cdot h$
CUBO		$6a^2$	a^3
PRISMA RECTO RECTANGULAR		h(a + b + c)+ 2B B = área basal	Bh
CILINDRO RECTO BASE CIRCULAR		$2\pi rh + 2\pi r^2$	$\pi r^2 \cdot h$
PIRÁMIDE RECTA BASE CUADRADA		$2ag + a^2$ g = apotema lateral	$\frac{1}{3} a^2 \cdot h$
CONO RECTO BASE CIRCULAR		$\pi rg + \pi r^2$ g= generatriz	$\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
ESFERA		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3} \pi r^3$

Volumen

Área de la base por la altura

Volumen

Área de la base por la altura dividido por tres

EJEMPLOS

1. ¿Cuál es el área y el volumen del prisma de base triangular de la figura 1 cuyas aristas miden 2 cm?

	Área	Volumen
A)	$6+\sqrt{3}$ cm^2	$\sqrt{3}$ cm^3
B)	$12+2\sqrt{3}$ cm^2	$\sqrt{3}$ cm^3
C)	$12+\sqrt{3}$ cm^2	$\sqrt{3}$ cm^3
D)	$12+2\sqrt{3}$ cm^2	$2\sqrt{3}$ cm^3
E)	$12+2\sqrt{3}$ cm^2	$4\sqrt{3}$ cm^3

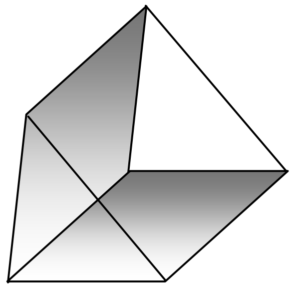


Fig. 1.

2. ¿Cuál es el volumen del cono generado por un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm cada uno?

A) 3π cm^3
B) 6π cm^3
C) 9π cm^3
D) 27π cm^3
E) Se requiere información adicional

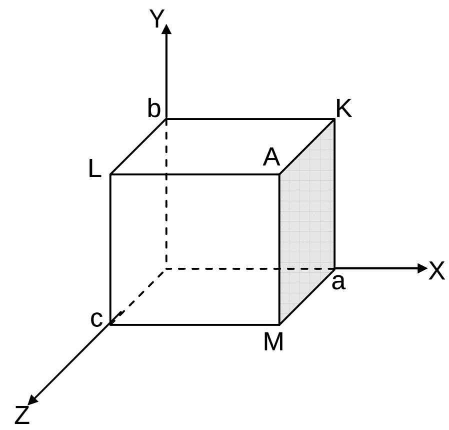
3. El área de la esfera cuyo radio mide 6 cm es

A) $16\ \pi$ cm^2
B) $36\ \pi$ cm^2
C) $72\ \pi$ cm^2
D) $144\ \pi$ cm^2
E) $288\ \pi$ cm^2

PUNTOS EN EL ESPACIO

En la figura observamos tres ejes **x, y, z** mutuamente perpendiculares que generan también tres planos perpendiculares **xy, xz,** y el **yz.**

El paralelepípedo del dibujo, tiene tres de sus vértices en los ejes en tanto que el punto **K** está en el plano **XY**, el punto **L**, en el plano **YZ** y el punto **M** en el plano **XZ**, pero el punto **A** está "suspendido" en el espacio encerrado por los tres planos. Este punto **A** tiene coordenadas **(a, b,c)**



EJEMPLOS

1. ¿Cuánto mide la diagonal interior de un cubo de arista 1?

   A) 1
   B) $\sqrt{2}$
   C) $\sqrt{3}$
   D) $\sqrt[3]{2}$
   E) $\sqrt[3]{3}$

2. ¿Cuál es la distancia entre el origen de coordenadas y el punto (1, 1, 1)?

   A) 1
   B) 3
   C) $\sqrt{2}$
   D) $\sqrt{3}$
   E) $\sqrt[3]{3}$

EJERCICIOS

1. El cuadrilátero ABCD es un rectángulo (figura 1). Si $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{DC} = 2x$, entonces el área del cilindro generado al rotar el rectángulo respecto del lado $\overline{AD}$ es

   A) $4\pi\ x^2$
   B) $6\pi\ x^2$
   C) $8\pi\ x^2$
   D) $12\pi\ x^2$
   E) $16\pi\ x^2$

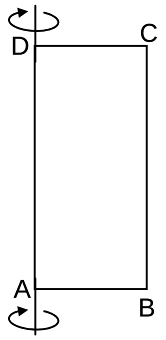


Fig. 1

2. La mitad de cada una de las caras de un cubo se ha sombreado (figura 2). Si la superficie total sombreada del cubo es de 48 cm^2, ¿cuál es el volumen del cubo?

   A) 64 cm^3
   B) 96 cm^3
   C) 128 $\sqrt{2}$ cm^3
   D) 192 cm^3
   E) 256 cm^3

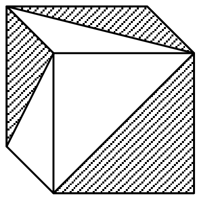


Fig. 2

3. Al desplazar 3 cm un triángulo equilátero de altura $\sqrt{3}$ cm, se obtiene un prisma recto. ¿Cuál es el área del cuerpo, en centímetros cuadrados?

   A) $3\sqrt{3}$
   B) $3 + \sqrt{3}$
   C) $6\sqrt{3}$
   D) $18 + \sqrt{6}$
   E) $18 + 2\sqrt{3}$

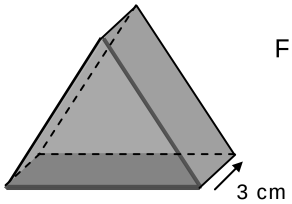


Fig. 3

4. Por rotación es posible generar:

   I) Un cilindro.
   II) Un cubo.
   III) Un cono.

   A) Sólo I
   B) Sólo I y II
   C) Sólo I y III
   D) Sólo II y III
   E) I, II y III

5. ¿Cuánto mide el menor ángulo diedro formado por el plano ABCD y una de las caras del paralelepípedo rectangular de aristas 4, $4\sqrt{3}$, 10 de la figura 4?

A) $\sqrt{3}$º
B) $2\sqrt{3}$º
C) 30º
D) 60º
E) 90º

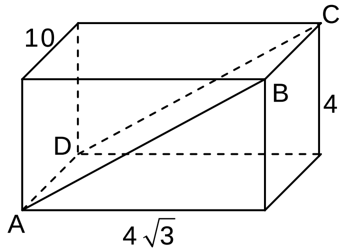


Fig. 4

6. Dentro de una caja cúbica cuyo volumen es 216 cm^3, es colocada una pelota que es tangente a las caras del cubo (figura 5). ¿Cuál es el volumen de la pelota?

A) 108π cm^3
B) 36π cm^3
C) 27π cm^3
D) 18π cm^3
E) 6π cm^3

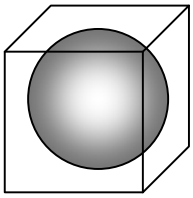


Fig. 5

7. El triángulo equilátero ABC de la figura 6, tiene sus vértices en los ejes coordenados. Si uno de los vértices tiene coordenadas (3, 0, 0), ¿cuál será su nueva coordenada si se traslada por un vector (0,0, 3)?

A) (0, 3, 3)
B) (3, 0, 3)
C) (3, 3, 3)
D) (0, 3, 0)
E) (3, 0, 0)

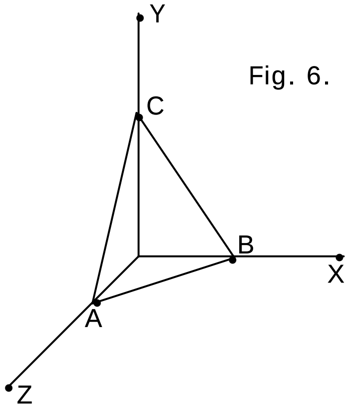


Fig. 6.

8. La figura 7 representa una piscina generada al trasladar "n" metros el trapecio sombreado. El largo de la piscina es 8 metros y tiene 1,5 metros de profundidad mínima y 2,5 metros de profundidad máxima. Para que el volumen de la piscina sea 56 m^3 el valor de "n" debe ser

A) 1,5 m
B) 2,5 m
C) 3,5 m
D) 4,0 m
E) 4,5 m

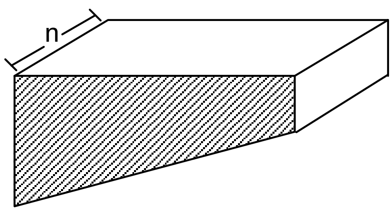


Fig. 7

9. Al sumergir completamente una piedra dentro de un tubo cilíndrico de 5 cm de radio (figura 8), el nivel del agua que contiene sube 4 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra? (considere π = 3,14)

A) 314,0 cm^3
B) 251,2 cm^3
C) 125,6 cm^3
D) 31,4 cm^3
E) Falta información para determinarlo

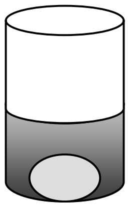


Fig. 8

10. ¿Cuál es el volumen de un cuerpo generado por la traslación perpendicular de 2 cm, de un cuadrado de lado 5?

A) 10 cm^3
B) 20 cm^3
C) 25 cm^3
D) 50 cm^3
E) 125 cm^3

11. Si dos de las coordenadas de un cubo son (0, 0, 0) y (3, 0, 0). ¿Cuál(es) de las siguientes coordenadas puede(n) pertenecer a dicho cubo?

I) (0, 3, 0)
II) (0, 0, 3)
III) (3, 3, 3)
IV) (3, -3, 0)

A) Solo I y II
B) Sólo II y III
C) Sólo III y IV
D) Sólo I, II y III
E) Todas ellas

12. El cilindro de la figura 9 tiene un cono en su interior cuyo volumen es $2\pi\ r^2$ cm^3, si la altura y la base del cono coinciden con las del cilindro, entonces ¿cuál es el volumen del cilindro?

A) $\frac{2}{3}\pi\ r^2$
B) $\pi\ r^2$
C) $2\pi\ r^2$
D) $3\pi\ r^2$
E) $6\pi\ r^2$

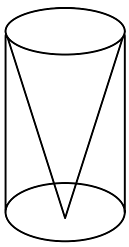


Fig. 9

13. El trapecio rectángulo ABCD de la figura 10, se hace rotar en torno al eje BC, entonces el volumen del sólido así generado es de

A) 16π cm^3
B) 48π cm^3
C) 64π cm^3
D) 80π cm^3
E) 96π cm^3

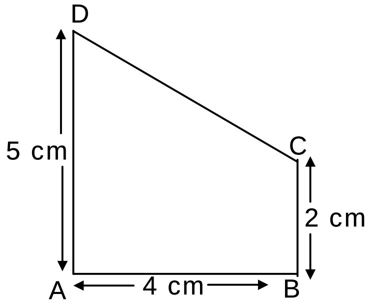


Fig. 10

14. Los puntos A, B, C y D de la figura 11, son los vértices de la base de un cubo. ¿Cuál de los puntos de las alternativas **NO** es uno de los 4 vértices que faltan del cubo?

A) (1, 2, 4)
B) (2, 5, 4)
C) (6, 1, 4)
D) (6, 5, 4)
E) (2, 1, 4)

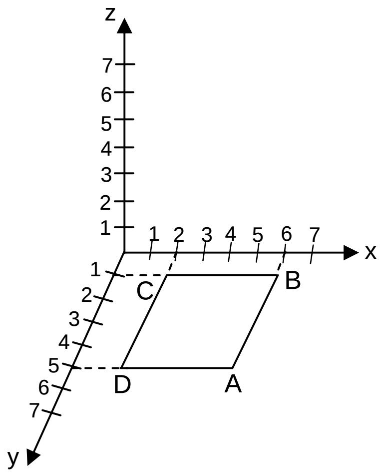


Fig. 11

15. En la figura 12, se muestra un cuerpo de revolución. ¿En cuál(es) de las opciones siguientes se puede generar el cuerpo al rotar la figura plana en torno al eje AB?

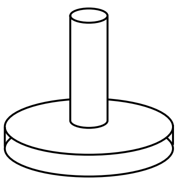
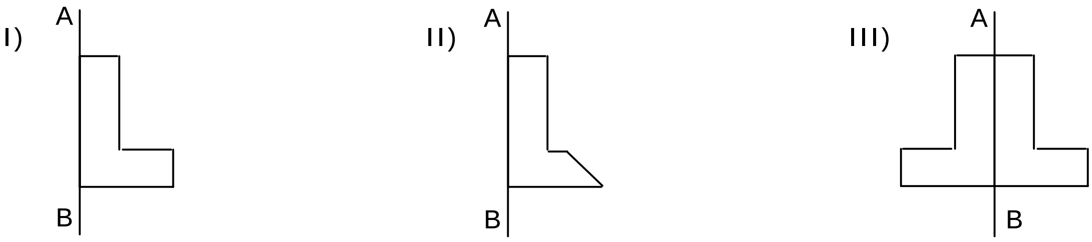


Fig. 12



A) Sólo en I
B) Sólo en I y en II
C) Sólo en I y en III
D) Sólo en II y en III
E) En I, en II y en III

16. El cilindro de la figura 13, se engendró por la revolución completa del rectángulo sombreado, alrededor de uno de sus lados. Se puede determinar el volumen del cilindro si:

(1) El área de una de las caras circulares es 16π cm^2 y el área del rectángulo sombreado es 32 cm^2.

(2) La altura del cilindro es 8 cm.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

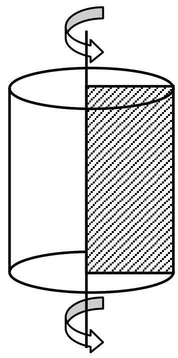


Fig. 13

17. El volumen de una esfera de radio r se puede calcular si se sabe que:

El volumen de un cono está contenido cuatro veces en el volumen de la esfera.

El radio del cono es igual al radio de la esfera.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

18. Las caras A y B de la caja (fig. 14) son cuadradas y el resto son rectangulares. El volumen de la caja se puede determinar si:

(1) El área de una de las caras cuadradas es de 36 cm^2.

(2) El perímetro de una de las caras rectangulares es de 32 cm.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

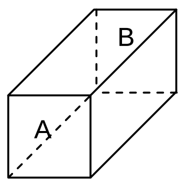


Fig. 14

19. El peso del ladrillo de la figura 15, se puede determinar si:

(1) 1 cm^3 del material con que ha sido fabricado pesa 2 gramos.

(2) Medio kilo equivale a 250 cm^3 del material ocupado.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

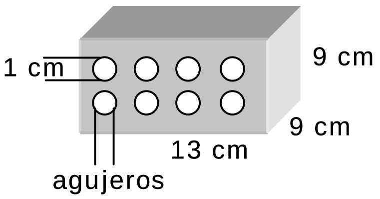


Fig. 15

20. Se puede determinar lal razón entre los volúmenes de los cuerpos generados por los triángulos ABC y DEF de la figura 16, al hacerlas girar en torno al eje indicado si:

(1) $\Delta ABC \cong \Delta DFE$

(2) $\overline{BC} = \overline{EF} = 2$ cm

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

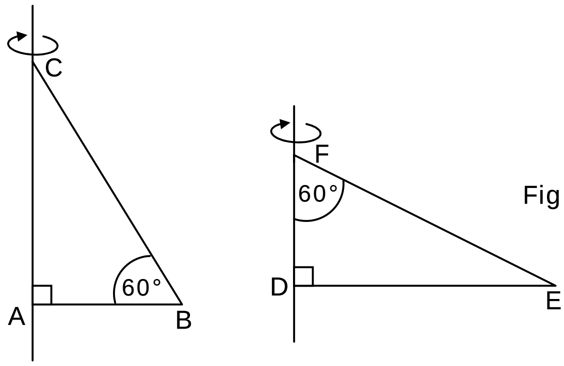


Fig. 16

RESPUESTAS

Ejemplos / Págs.	1	2	3
1	A		
2	D	E	
3	A	E	
5	D	C	D
6	C	D	

CLAVES PÁG. 7

1. B	6. B	11. E	16. A
2. A	7. B	12. E	17. E
3. E	8. C	13. C	18. C
4. C	9. A	14. A	19. D
5. C	10. D	15. C	20. D