GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 32

UNIDAD: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

PROBABILIDADES

NOCIONES ELEMENTALES

Experimento: Procedimiento que se puede llevar a cabo bajo las mismas condiciones un número indefinido de veces.

Experimento Aleatorio: Es aquel cuyo resultado no se puede predecir, habiendo un conjunto de resultados posibles.

Espacio Muestral: Es el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio. Si se representa el espacio muestral por E, cada elemento de él es llamado punto muestral.

Evento o Suceso: Es un resultado particular de un experimento aleatorio. En otras palabras, es un subconjunto del espacio muestral.

Observación: En todos los experimentos que se realicen con monedas, dados, cartas, bolitas, etc..., se supondrá que no están cargados o trucados, a no ser que se indique otra cosa.

EJEMPLOS

1. ¿Cuál(es) de los siguientes experimentos es(son) aleatorios?

   I) Encender una vela y observar si alumbra.
   II) Lanzar un dado y observar si la cara superior muestra un cinco.
   III) Preguntarle a un desconocido si fuma.

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo III
   D) Sólo II y III
   E) I, II y III

2. Un vendedor del servicio de televisión por cable visita tres casas, anotando **v** si vende y **n** si no vende. El evento de vender el servicio a lo más en una de ellas está representado por

   A) [nnn, nnv, nvn, vnn]
   B) [nnv, nvn, vnn]
   C) [vvv, vvn, vnv, nvv]
   D) [vvn, vnv, nvv]
   E) [nnn]

TIPOS DE EVENTOS

Evento o suceso cierto	**:**	Es el propio Espacio Muestral.
Evento o Suceso Imposible	**:**	Es aquel que no tiene elementos. Es decir, es el subconjunto vacío (∅) del espacio muestral.
Eventos Mutuamente Excluyentes	**:**	Son aquellos en los cuales la ocurrencia de uno de ellos impide la ocurrencia de los otros. En otras palabras, cuando dos o más eventos no tienen elementos comunes.
Eventos Complementarios	**:**	Cuando los eventos no tienen puntos o elementos comunes y la unión de ellos es el espacio muestral.

EJEMPLOS

1. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

    I) Al lanzar un dado el evento "sacar un número menor que siete", es un suceso cierto.
    II) "Lanzar un dado y que salga un número menor que tres" y "lanzar un dado y que salga un múltiplo de 3" son sucesos mutuamente excluyentes.
    III) "Lanzar dos dados y obtener una suma mayor que 12", es un evento imposible.

    A) Sólo I
    B) Sólo III
    C) Sólo I y III
    D) Sólo II y III
    E) I, II y III

2. Dado el espacio Muestral E = $\{a,e,i,o,u\}$ y los eventos

    A = $\{i,o,u\}$, B= $\{o,u\}$, C= $\{a\}$, D=$\{a,e\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

    A) A y B no son mutuamente excluyentes.
    B) A y D son complementarios.
    C) B y C son mutuamente excluyentes.
    D) B y D son complementarios.
    E) A y C son mutuamente excluyentes.

PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

Si un determinado suceso ocurre en **k** etapas diferentes, en donde la primera etapa puede ocurrir de n_1 maneras diferentes, la segunda de n_2 maneras diferentes y así sucesivamente, entonces el número total de maneras en que ocurre el suceso está dado por $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots n_k$

PRINCIPIO ADITIVO

Si dado un determinado suceso que tiene formas alternativas de llevarse a cabo, donde la primera de esas alternativas puede realizarse de n_1 maneras, la segunda alternativa puede realizarse de n_2 maneras, y así sucesivamente, hasta la última alternativa que puede realizarse de n_k maneras, entonces el número total de maneras en que ocurre este suceso es $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

EJEMPLOS

1. Un niño dispone de 6 lápices grafito de diferentes colores y de 7 lápices de cera distintos. ¿De cuántas maneras distintas puede escoger un lápiz?

   A) $6^2 \cdot 7^2$
   B) 42
   C) 13
   D) 12
   E) 1

2. En el experimento aleatorio: “lanzar 3 dados y observar el resultado que aparece en cada uno de ellos”, la cantidad de puntos muestrales que tiene el espacio muestral es

   A) 216
   B) 36
   C) 18
   D) 6
   E) 3

3. Diego desea comprar un televisor, para lo cual ha pensado que puede seleccionar entre tres marcas, W, N y L. Cuando acude a hacer la compra, se da cuenta que el televisor W se presenta en dos colores, 4 tamaños y puede tener Home Theater o no tenerlo. El televisor N se presenta en tres colores, en dos tamaños y también puede escoger con Home Theater o no. Finalmente, el televisor L se presenta en un solo color, dos tamaños y no tiene Home Theater. ¿Cuántas maneras tiene Diego de seleccionar el televisor que va a comprar?

   A) 3
   B) 19
   C) 30
   D) 192
   E) 384

TRIÁNGULO DE PASCAL

Representa una regularidad numérica que se ilustra en la siguiente figura

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Se pueden observar algunas regularidades y estas son:

- Los coeficientes primero y último de cada fila son siempre 1.
- Cualquier otro coeficiente de una fila se obtiene como la suma de los dos valores que están justo arriba en la fila anterior.
- Si se suman los números de cada fila el resultado es siempre una potencia de 2.
- Existe una simetría en cada fila respecto a su centro.

OBSERVACIÓN: El triángulo de Pascal también se utiliza en experimentos aleatorios que tengan dos sucesos equiprobables de ocurrencia, como por ejemplo: lanzar una moneda, el sexo de una persona, respuestas de preguntas del tipo verdadero o falso, etc.

Ejemplo: Al lanzar una moneda cuatro veces (o lanzar 4 monedas a la vez) se obtienen 16 resultados posibles, que al determinarlos a través del triángulo de Pascal son

1 ⟶ Cero lanzamiento 2^0
1 1 ⟶ Un lanzamiento 2^1
1 2 1 ⟶ Dos lanzamiento 2^2
1 3 3 1 ⟶ Tres lanzamiento 2^3
1 4 6 4 1 ⟶ Cuatro lanzamiento 2^4

Lo cual se grafica de la siguiente manera

1
$C \quad S$
$C^2 \quad 2CS \quad S^2$
$C^3 \quad 3C^2S \quad 3CS^2 \quad S^3$
$C^4 \quad 4C^3S \quad 6C^2S^2 \quad 4CS^3 \quad S^4$

OBSERVACIÓN: $4C^3S$ significa
⟶ CCCS
⟶ CCSC
⟶ CSCC
⟶ SCCC

EJERCICIOS

1. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 2 y 3?

A) 27
B) 18
C) 9
D) 6
E) 3

2. Mariana desea comprar un helado y le dan las siguientes posibilidades

Tamaño: Grande, mediano o chico
Sabor : Frutilla, chocolate, vainilla o piña.

¿Cuántas posibilidades le ofrecen en la venta?

A) 64
B) 12
C) 8
D) 7
E) 4

3. Sergio y Mauricio compiten entre los dos un campeonato de tenis. El primero que gane dos juegos seguidos o que complete tres triunfos gana la competencia. ¿De cuántas maneras puede ser ganado este campeonato?

A) 3
B) 6
C) 8
D) 9
E) 10

4. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) El evento “lanzar tres veces una moneda”, tiene un espacio muestral de 3 elementos.
II) El espacio muestral del suceso “Lanzar dos monedas distintas”, tiene 3 elementos.
III) El suceso complementario del espacio muestral es el conjunto vacío.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo I y III

5. En el experimento aleatorio “lanzar tres monedas”, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) ejemplo(s) de evento(s) mutuamente excluyente?

I) “Obtener exactamente dos caras” y “Obtener exactamente dos sellos”.
II) “Obtener a lo más una cara “ y “Obtener a lo más un sello”.
III) “Obtener exactamente un sello” y “obtener a lo menos una cara”.

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

6. Un profesor decide confeccionar un mini control de 5 preguntas de verdadero o falso. Si desea que 3 preguntas sean verdaderas y 2 falsas, ¿de cuántas maneras distintas puede combinar las preguntas de esta prueba?

A) 30
B) 25
C) 15
D) 10
E) 5

7. En un sorteo se conceden dos premios distintos y participan cuatro personas. ¿De cuántas maneras pueden repartirse los premios si una misma persona no puede recibir dos premios?

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 16

8. El número de resultados posibles de un experimento que consiste en el lanzamiento de un dado y una moneda es

A) 24
B) 12
C) 8
D) 6
E) 2

9. En un experimento aleatorio E, dos eventos A y B son complementarios si:

(1) Al unir los elementos de A y B se obtiene el espacio muestral.

(2) La intersección de A y B es vacía.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

10. Al lanzar un dado, podemos conocer el número que aparece en la cara superior si sabemos que:

(1) El número es primo.

(2) El número es impar menor o igual a tres.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

PROBABILIDAD CLÁSICA

La probabilidad de un suceso A se obtiene dividiendo el número de casos favorables al evento A por el número total de casos posibles.
La probabilidad de A se denotará por P(A).

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\text{Números de casos favorables (A)}}{\text{Números total de casos}}$$

Observación: $0 \leq P(A) \leq 1$ o bien $0\% \leq P(A) \leq 100\%$

EJEMPLOS

1. Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener más de 10 puntos?

A) $\frac{2}{36}$

B) $\frac{3}{36}$

C) $\frac{7}{36}$

D) $\frac{11}{36}$

E) $\frac{12}{36}$

2. En el lanzamiento de una moneda de \$100 y una de \$50, la probabilidad de obtener cara en la de cien y sello en la de cincuenta es

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{4}$

E) 1

PROBABILIDADES DE EVENTOS

- Si **A** y **B** son dos sucesos no excluyentes (pueden ocurrir ambos al mismo tiempo), la probabilidad de que ocurran A o B o ambos está dada por:

$$\boxed{P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

- Si A y B son dos sucesos excluyentes (no pueden ocurrir ambos al mismo tiempo), la probabilidad de que ocurra A o B está dada por:

$$\boxed{P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

EJEMPLOS

1. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea par o divisible por 3?

   A) $\frac{1}{6}$

   B) $\frac{1}{4}$

   C) $\frac{1}{3}$

   D) $\frac{1}{2}$

   E) $\frac{2}{3}$

2. Un naipe inglés consta de 52 cartas repartidas en cuatro pintas distintas, de las cuales dos son rojas (corazón y diamante) y dos son negras (pique y trébol). Cada pinta consta de 3 figuras: rey (K), dama (Q), caballero (J) y de 10 cartas numeradas desde 1 (as) a 10. Entonces, la probabilidad de obtener un “AS” o un “REY” al extraer una de las 52 cartas de una baraja inglesa es

   A) $\frac{1}{13}$

   B) $\frac{2}{13}$

   C) $\frac{4}{13}$

   D) $\frac{1}{4}$

   E) $\frac{1}{3}$

- Los sucesos A y B se consideran independientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de uno no influye sobre la probabilidad de ocurrencia o no ocurrencia del otro.

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

- Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. La probabilidad condicional de la ocurrencia del evento A dado que ya ha ocurrido el evento B es:

$$\mathbf{P(A/B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

EJEMPLOS

1. Si tienen dos urnas: la primera contiene 6 bolitas verdes y 4 rojas, la segunda contiene 3 bolitas verdes y 7 rojas. Si se extrae una bolita de cada una, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean verdes?

   A) $\frac{3}{10}$

   B) $\frac{6}{10}$

   C) $\frac{9}{10}$

   D) $\frac{9}{20}$

   E) $\frac{18}{100}$

2. En una urna hay 8 sobres idénticos. En dos de los sobres hay un billete de $20.000 y los otros 6 tienen un billete de $10.000. Se extraen dos sobres simultáneamente y al abrir uno de ellos se observa que contiene un billete de $20.000. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo sobre contenga el otro billete de $20.000?

   A) $\frac{1}{28}$

   B) $\frac{1}{4}$

   C) $\frac{1}{7}$

   D) $\frac{1}{36}$

   E) $\frac{1}{8}$

EJERCICIOS

1. Se escoge una ficha de dominó (28 piezas) al azar. ¿Cuál es la probabilidad que se obtengan 6 puntos?

   A) $\frac{1}{28}$

   B) $\frac{4}{28}$

   C) $\frac{5}{28}$

   D) $\frac{6}{28}$

   E) $\frac{8}{28}$

2. Se tienen 5 bolitas blancas y 3 negras en una urna y 5 blancas y 7 negras en otra urna. ¿Cuántas bolitas blancas es necesario traspasar desde una urna a la otra para que la probabilidad de sacar una bolita negra sea la misma en ambas urnas?

   A) 5
   B) 4
   C) 3
   D) 2
   E) 1

3. En el curso 4º A hay el doble de mujeres que de hombres y en el 4º B hay 5 hombres menos que mujeres. Si la probabilidad de elegir un alumno que sea hombre, es la misma en ambos cursos, ¿cuántos alumnos en total tiene el 4º B?

   A) 15
   B) 20
   C) 25
   D) 30
   E) 35

4. Se lanza una moneda 3 veces y se obtiene 3 caras, ¿cuál es la probabilidad que la cuarta vez se obtenga cara?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{7}{16}$

5. El disco de la figura 1 está dividido en cuatro sectores iguales pintados de colores diferentes: azul, blanco, verde y rojo. Al hacer dos lanzamientos, ¿cuál es la probabilidad de caer por lo menos una vez en el sector rojo?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{7}{16}$

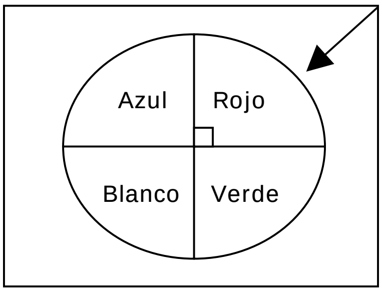

Fig. 1

6. Al ser consultadas 100 personas, sobre el tipo de artículo que regalan en Navidad, respondieron de las siguientes maneras:

Regalos	**f**
Rodados	4
Didácticos	13
Juegos	18
Ropa	14
Cosas útiles	34
Libros	1
Otros	16

Si se elige una persona encuestada al azar, ¿cuál es la probabilidad que no regale libros ni didácticos?

A) 14%
B) 17%
C) 34%
D) 85%
E) 86%

7. En una urna con fichas azules, blancas, rojas y verdes, la probabilidad de escoger una ficha azul o blanca es 0,4. Si en la urna hay 15 fichas de las cuales 7 son verdes, ¿cuál es el número de fichas rojas?

A) 6
B) 5
C) 4
D) 2
E) 3

8. Al lanzar al aire dos dados, uno a continuación del otro, de distintos colores, se observa que la suma de los números que aparecen es de por lo menos siete. La probabilidad de que en el segundo dado aparezca el cuatro es

A) $\frac{4}{21}$
B) $\frac{5}{21}$
C) $\frac{6}{21}$
D) $\frac{7}{21}$
E) $\frac{8}{21}$

9. Alvaro y Carola deciden tener 4 hijos. Considerando el triángulo de Pascal de la figura 2, ¿cuál es la probabilidad que sean dos mujeres y dos hombres?

A) $\frac{4}{16}$
B) $\frac{6}{16}$
C) $\frac{8}{16}$
D) $\frac{5}{32}$
E) $\frac{20}{32}$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Fig. 2

10. El laberinto de la figura 3, muestra distintos recorridos que se pueden ejecutar (sin retroceder) partiendo de la posición 1 y acceder a cualquiera de las cinco salidas A, B, C, D o E. ¿Cuál es la probabilidad que una hormiga salga por B?

A) $\frac{3}{15}$

B) $\frac{3}{8}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{8}$

E) $\frac{1}{5}$

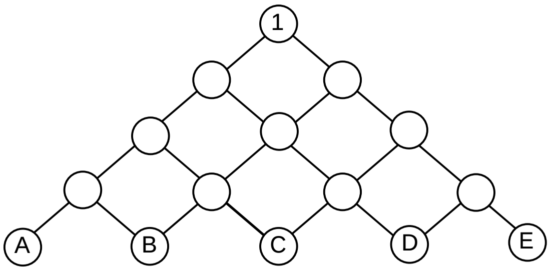

Fig. 3

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3
1	D	A	
2	E	D	
3	C	A	C
8	B	A	
9	E	B	
10	E	C	

CLAVES PÁG. 5

1.	D	6.	D
2.	B	7.	D
3.	E	8.	B
4.	C	9.	C
5.	C	10.	C

CLAVES PÁG. 11

1.	B	6.	E
2.	D	7.	D
3.	A	8.	A
4.	A	9.	B
5.	E	10.	C