GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 25

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

RAÍCES

DEFINICIÓN 1: Si **n** es un entero par positivo y **a** es un real no negativo, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el único real **b**, no negativo, tal que $b^n = a$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ b \geq 0}$$

DEFINICIÓN 2: Si **n** es un entero impar positivo y **a** es un real cualquiera, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el único real **b** tal que $b^n = a$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ b \in \mathrm{IR}}$$

OBSERVACIONES:

- Si **n** es un entero par positivo y **a** es un real negativo, entonces $\sqrt[n]{a}$ **NO ES REAL.**
- La expresión $\sqrt[n]{a^k}$, con **a** real no negativo, se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}}$$

- $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|, \text{ para todo real } a}$

EJEMPLOS

1. $\sqrt{16} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{-32} =$

A) 14
B) 6
C) 4
D) 2
E) 0

2. ¿Cuál(es) de las siguientes raíces representa(n) un número real?

I) $\sqrt[3]{-2}$
II) $\sqrt[4]{-16}$
III) $\sqrt[5]{-1}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

PROPIEDADES

Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ están definidas en IR, se cumplen las siguientes propiedades:

1. MULTIPLICACIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$$

2. DIVISIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[3]{5\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3}} =$

   A) 15
   B) $\sqrt[9]{25\sqrt[4]{3}}$
   C) $\sqrt[3]{25\sqrt{3}}$
   D) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}}$
   E) $\sqrt[3]{75}$

2. $\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{a}{b^3}}}{\sqrt[4]{\dfrac{b}{a^3}}} =$

   A) 1
   B) $\dfrac{a}{b}$
   C) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^4$
   D) $\sqrt{\dfrac{1}{ab}}$
   E) $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$

PROPIEDADES

3. POTENCIA DE UNA RAÍZ

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad , \; a > 0}$$

4. RAÍZ DE UNA RAÍZ

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[3]{8^4} =$

   A) 2^3
   B) 2^4
   C) 2^6
   D) 2^{12}
   E) 2^{36}

2. $\sqrt{\sqrt[3]{64}} =$

   A) 2
   B) 4
   C) 8
   D) $\sqrt[5]{64}$
   E) $\sqrt[6]{8}$

3. $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\ldots\sqrt{3}}}}_{\text{n radicales}} =$

   A) $\sqrt{3}$
   B) $\sqrt[n]{3}$
   C) $\sqrt[2n]{3}$
   D) $\sqrt[2^n]{3}$
   E) $\sqrt[n^2]{3}$

PROPIEDADES

5. AMPLIFICACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DEL ORDEN DE UNA RAÍZ

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}\ , m \in Z^+\ ,\ \ a \in IR^+$$

6. PRODUCTO DE RAÍCES DE DISTINTO ÍNDICE

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m \cdot b^n}\ ,\ \ a,\ b \in IR^+$$

7. FACTOR DE UNA RAÍZ COMO FACTOR SUBRADICAL

$$b\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}\ ,\ \ b \in IR^+$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{2}$ =

A) $\sqrt[8]{16}$
B) $\sqrt[6]{16}$
C) $\sqrt[4]{16}$
D) $\sqrt[4]{32}$
E) $\sqrt{8}$

2. $2 \cdot \sqrt[3]{3}$ =

A) $\sqrt[3]{36}$
B) $\sqrt[3]{24}$
C) $\sqrt[3]{18}$
D) $\sqrt[3]{12}$
E) $\sqrt[3]{6}$

3. Si $x > 0$, entonces $2\sqrt{18x^2} - \sqrt{32x^2} - 3x\sqrt{2}$ =

A) $-x\sqrt{2}$
B) $x\sqrt{2}$
C) $-2x\sqrt{2}$
D) $2x\sqrt{2}$
E) $3x\sqrt{2}$

RACIONALIZACIÓN

Racionalizar el denominador de una fracción consiste en transformarla en una fracción equivalente cuyo denominador no contenga ninguna raíz.

CASO 1: Fracciones de la forma $\dfrac{a}{b\sqrt[n]{c^k}}$

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^k}} = \frac{a}{b\sqrt[n]{c^k}} \cdot \frac{\sqrt[n]{c^{n-k}}}{\sqrt[n]{c^{n-k}}}$$

$$= \frac{a\sqrt[n]{c^{n-k}}}{b\sqrt[n]{c^k \cdot c^{n-k}}}$$

$$= \frac{a\sqrt[n]{c^{n-k}}}{b\sqrt[n]{c^n}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{a\sqrt[n]{c^{n-k}}}{bc}}$$

CASO 2: Fracciones de la forma $\dfrac{a}{p\sqrt{b} + q\sqrt{c}}$

$$\frac{a}{p\sqrt{b} + q\sqrt{c}} = \frac{a}{p\sqrt{b} + q\sqrt{c}} \cdot \frac{p\sqrt{b} - q\sqrt{c}}{p\sqrt{b} - q\sqrt{c}}$$

$$= \frac{a\,(p\sqrt{b} - q\sqrt{c})}{(p\sqrt{b})^2 - (q\sqrt{c})^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{a(p\sqrt{b} - q\sqrt{c})}{p^2b - q^2c}}$$

EJEMPLOS

1) $\dfrac{6}{5\sqrt{3}} =$

A) $\dfrac{6}{5}\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $\dfrac{2}{5}\sqrt{3}$

D) $\dfrac{2}{5}$

E) $-\dfrac{6}{5}\sqrt{3}$

2) $\dfrac{12}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$

A) $24\sqrt{3} + 36\sqrt{2}$

B) $24\sqrt{3} - 36\sqrt{2}$

C) $-4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$

D) $6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

E) $4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

ORDENACIÓN DE RAÍCES

Algunos métodos para ordenar expresiones que contienen raíces son las siguientes:

1. Cálculo de cada expresión, con los valores exactos o aproximados de cada raíz.

2. Si se tienen raíces positivas de igual índice con factores distintos de 1, los factores se ingresan a la raíz como factores subradicales.

3. Si las expresiones contienen raíces en los denominadores, estos se racionalizan.

EJEMPLOS

1. La figura 1 muestra un triángulo equilátero de lado 4 y área **x**, un rectángulo de ancho $\sqrt{2}$, largo 5 y área **y**, y un triángulo de catetos 2 y 7 y área **z**. Entonces, se cumple que

A) $x < y < z$
B) $y < z < x$
C) $z < y < x$
D) $y < x < z$
E) $x < z < y$

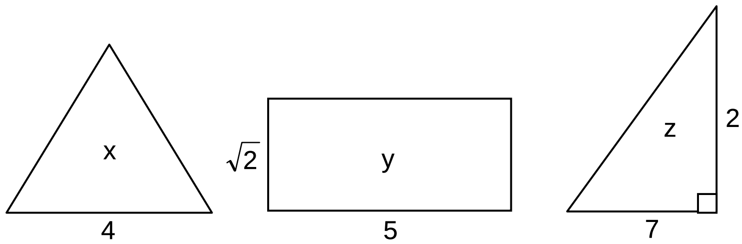

Fig. 1

2. El orden decreciente de los números $a = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $b = \dfrac{10}{3\sqrt{5}}$ y $c = \dfrac{15}{\sqrt{125}}$, es

A) b, c, a
B) b, a, c
C) a, c, b
D) a, b, c
E) c, b, a

ECUACIONES IRRACIONALES CON UNA INCÓGNITA

Son aquellas en las que aparece alguna raíz conteniendo en el radicando la incógnita de la ecuación.

$$\boxed{a + \sqrt{x} = b}$$

Nota:

Para resolver una ecuación irracional con radicales de índice 2, procederemos de la siguiente manera:

- El término que contiene la raíz se deja aislado en uno de los miembros de la ecuación. Si hubiera dos raíces se sitúa una en cada miembro.
- Se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación para eliminar la raíz.
- Se resuelve la ecuación resultante.
- Las soluciones que arroje la ecuación resultante se debe comprobar en la ecuación original.

EJEMPLOS

1. La solución de la ecuación $\sqrt{x+2} - 3 = 0$,

   A) es mayor que 7 y menor que 8
   B) es igual al sucesor del primo 5
   C) es mayor que 6 y menor que 7
   D) es tal que su doble es 14
   E) no es un número real

2. La suma de las soluciones de la ecuación $\sqrt{x+6} - x = 0$, es

   A) -2
   B) 1
   C) 3
   D) -1
   E) 5

EJERCICIOS

1. $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{4} =$

   A) $\sqrt[5]{-4}$
   B) $\sqrt[6]{-4}$
   C) 0
   D) -4
   E) 4

2. $\sqrt{0{,}09}$ corresponde a

   A) 0,003
   B) 0,018
   C) 0,03
   D) 0,18
   E) 0,3

3. El valor de $5\sqrt{12} - 2\sqrt{27}$ es

   A) $-8\sqrt{3}$
   B) $-4\sqrt{3}$
   C) $4\sqrt{3}$
   D) $2\sqrt{3}$
   E) $\sqrt{3}$

4. $5\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{8} =$

   A) $20\sqrt{14}$
   B) $80\sqrt{3}$
   C) $50\sqrt{3}$
   D) $40\sqrt{3}$
   E) $20\sqrt{3}$

5. Si $\sqrt{x} = 2\sqrt{2}$, el valor de $\sqrt{9} \cdot x$ es

A) 72
B) 24
C) $6\sqrt{2}$
D) $\sqrt{72}$
E) $2\sqrt{18}$

6. ¿Cuál(es) de las siguientes raíces representa(n) un número real?

I) $\sqrt[4]{-1}$
II) $\sqrt[5]{-32}$
III) $\sqrt{7}$

A) Sólo II
B) Sólo III
C) Sólo II y III
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas

7. $\sqrt{3\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{3\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$

A) 5
B) 25
C) $-\sqrt{25}$
D) $\sqrt{5}$
E) $6\sqrt{3}$

8. $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} =$

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt[3]{2}$
C) $\sqrt[6]{2}$
D) 1
E) 2

9. $\dfrac{\sqrt{4^5+4^5+4^5+4^5}}{\sqrt[3]{4^5+4^5+4^5+4^5}} =$

A) 4
B) $4^{\frac{5}{6}}$
C) 1
D) $4^{\frac{2}{3}}$
E) $4^{\frac{3}{2}}$

10. El valor de x, en la ecuación $\sqrt{x^2-9} - x = 5$, está entre

A) 0 y 3
B) -2 y 2
C) 2 y 5
D) -3 y 0
E) -4 y 7

11. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) un número real?

I) $\sqrt{2\sqrt{5}-5}$
II) $\sqrt{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$
III) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo II y III
E) Todas ellas

12. ¿Cuál es el orden creciente de los números $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{4}{3\sqrt{2}}$ y $c = \frac{3}{4}$?

A) a, b, c
B) a, c, b
C) c, a, b
D) b, c, a
E) b, a, c

13. $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} =$

A) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$
B) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$
C) $\sqrt{5} - \sqrt{6}$
D) $-\sqrt{5} - \sqrt{6}$
E) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{-11}$

14. Si $1 + \sqrt{x} = b$, con $b \geq 1$, entonces $x + 1$ en función de b, es

A) $b^2 - 2b + 1$
B) $b^2 - 2b + 2$
C) $b^2 - 2b - 2$
D) $b^2 + 2b - 2$
E) $b^2 + 2b + 2$

15. La expresión $\frac{1}{\sqrt{2\,(a-b)}}$ es real si:

(1) $b - a < 0$

(2) $2a - 2b \neq 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3
1	C	D	
2	E	B	
3	B	A	D
4	D	B	A
5	C	C	
6	E	A	
7	D	C	

CLAVES PÁG. 8

1. C	6. C	11. D
2. E	7. A	12. B
3. C	8. D	13. D
4. B	9. A	14. B
5. B	10. E	15. A