

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

LOGARITMOS – ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

DEFINICIÓN

El logaritmo de un número real positivo "**b**" en base "**a**", positiva y distinta de 1, es el número "**m**" a que se debe elevar la base para obtener dicho número.

$$\log_a b = m \Leftrightarrow a^m = b, \quad b > 0; \quad 1 \neq a > 0$$

- OBSERVACIONES:**
- La expresión $\log_a b = m$ se lee "el logaritmo de **b** en base **a** es **m**".
 - El logaritmo es la operación inversa de la exponenciación.
 - $\log_{10} a = \log a$.

EJEMPLOS

1. $\log_5 125 = 3$ expresado en forma exponencial es

A) $3^5 = 125$

B) $5^{\frac{1}{3}} = 125$

C) $5^3 = 125$

D) $125^{\frac{1}{5}} = 3$

E) $125^{-3} = \frac{1}{5}$

2. $3^3 = 27$ expresado en forma logarítmica es

A) $\log_3 27 = 3$

B) $\log_{27} 3 = 3$

C) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = 3$

D) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = 27$

E) $\log_3 \left[\frac{1}{3} \right] = 27$

CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN DE LOGARITMO

C.1

$$\log_a 1 = 0$$

C.3

$$\log_a a^m = m$$

C.2

$$\log_a a = 1$$

C.4

$$a^{\log_a b} = b$$

EJEMPLOS

1. $\log(3 \cdot 3^{-1}) =$

- A) -1
- B) 0
- C) 1
- D) 9^{-1}
- E) -9

2. $\log_m \frac{m^2 + m}{m + 1} =$

- A) $2m$
- B) $m + 1$
- C) m
- D) 1
- E) 0

3. $\log_3 \left[\frac{1}{9} \right] =$

- A) $\frac{1}{3}$
- B) $-\frac{1}{3}$
- C) 2
- D) $-\frac{2}{3}$
- E) $\sqrt{3,9}$

4. $5^{\log_5 3^{-1}} =$

- A) $0, \bar{3}$
- B) -3
- C) 5
- D) 5^{-1}
- E) 3

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Sean $b > 0$, $c > 0$, $1 \neq a > 0$

P.1. LOGARITMO DE UN PRODUCTO

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

P.2. LOGARITMO DE UN CUOCIENTE

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

EJEMPLOS

1. $\log_3 5 + \log_3 7 =$

- A) $\log_3 5 \cdot \log_3 7$
- B) $(5 \cdot 7)^3$
- C) 3^{35}
- D) $\log_3 12$
- E) $\log_3 35$

2. Si $\log_2 m - \log_2 n = 5$, el cuociente $\frac{m}{n}$ es igual a

- A) 10
- B) 25
- C) 32
- D) 64
- E) 128

3. $\log 3 + \log 4 - \log 2$ escrito como el logaritmo de un número es

- A) $\log 5$
- B) $\log 6$
- C) $\log 10$
- D) $\log \frac{3}{2}$
- E) $\log \frac{3}{8}$

P.3 LOGARITMO DE UNA POTENCIA

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

P.4 LOGARITMO DE UNA RAÍZ

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b, \text{ con } n > 0$$

P.5 CAMBIO DE BASE

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ con } 1 \neq c > 0$$

EJEMPLOS

1. $\log_2 \frac{1}{8} =$

- A) 3
- B) 2
- C) 0
- D) -2
- E) -3

2. $\log_4 \sqrt{4,4} =$

- A) $\frac{1}{4}$
- B) 1
- C) 4
- D) 16
- E) Otro valor

3. Si $\log 3 = A$ y $\log 5 = B$, entonces $\log_3 5 =$

- A) $B - A$
 - B) $A - B$
 - C) $\frac{A}{B}$
 - D) $\frac{B}{A}$
 - E) $A \cdot B$
-

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Es aquella en la cual la incógnita aparece como exponente. Para su solución, al no poder igualar las bases de la potencia, se debe aplicar logaritmo en ambos miembros de la ecuación en base apropiada (generalmente se usa base 10).

ECUACIÓN LOGARÍTMICA

Es aquella en la cual la variable está en el argumento.

Resolver una ecuación logarítmica es determinar el o los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad.

Para determinar el valor de la variable, se sigue el siguiente método:

- a) **Resolver la ecuación:** Para ello se debe obtener una igualdad de logaritmos de bases iguales. En seguida, se igualan los argumentos. Es decir, se aplica la siguiente propiedad de los logaritmos:

$$\log_a A = \log_a B \Leftrightarrow A = B \text{ con } a, A, B \in \mathbb{R}^+ ; a \neq 1$$

- b) Verificar las soluciones ya que el argumento debe ser mayor que cero.

EJEMPLOS

1. Si $\log 16 = 2 \log x$, entonces $x =$

- A) 4
- B) -4
- C) ± 4
- D) 8
- E) $\sqrt{.8}$

2. Si $3 \log x = 2 \log 8$, entonces el valor de x en \mathbb{R} , es

- A) ± 4
- B) $\pm \frac{1}{4}$
- C) 4
- D) $\frac{1}{4}$
- E) $8^{\frac{3}{2}}$

EJERCICIOS

1. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es(son) equivalente(s) a $\log 8$?

- I) $\log 4 + \log 2$
- II) $3 \cdot \log 2$
- III) $2 \log 4 - \log 2$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo I y III
- D) Sólo II y III
- E) I, II y III

2. $\log_2 (-2) =$

- A) -2
- B) -1
- C) 1
- D) 2
- E) No está definido en IR

3. En la expresión $\log_3 x = 1$, el valor de x es

- A) $\frac{1}{3}$
- B) $-\frac{1}{3}$
- C) -1
- D) 3
- E) -3

4. Si $\log_x \frac{1}{16} = 2$, el valor de x es

- A) $\frac{1}{32}$
- B) $-\frac{1}{32}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $-\frac{1}{4}$
- E) 16^2

5. En la expresión $\log_9 3 = x$, el valor de x es

- A) 2
- B) -2
- C) $-\frac{1}{2}$
- D) $\frac{1}{2}$
- E) $\frac{1}{3}$

6. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es(son) verdadera(s)?

- I) $\log(ab) = \log a \cdot \log b$
- II) $\log(a + b) = \log a + \log b$
- III) $\frac{\log a}{\log b} = \log_b a$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y II
- E) Ninguna de ellas

7. $\log_n m \cdot \log_p n \cdot \log_m p =$

- A) $\log 10$
- B) $\log (mnp)$
- C) $m + n + p$
- D) $\log 1$
- E) Ninguna de las anteriores

8. $\log_{\frac{1}{4}} (16 \cdot \sqrt[3]{4}) =$

- A) $\frac{7}{3}$
- B) $-\frac{7}{3}$
- C) $\frac{1}{3}$
- D) $-\frac{1}{3}$
- E) $\frac{2}{3}$

9. Si $y = 5x$ con $x > 0$, entonces $\log_5 x - \log_5 y =$

- A) -1
- B) 1
- C) 0
- D) 5
- E) $\frac{1}{5}$

10. Si $7^{x+3} + 7^{x+2} + 7^{x+1} = 57$, entonces $\log_{(x+3)} \left[\frac{1}{x+5} \right] =$

- A) 2
- B) $\frac{3}{2}$
- C) 1
- D) $-\frac{3}{2}$
- E) -2

11. Si $10^{\log 2x} = 4$, entonces $x^3 =$

- A) 2
- B) $\sqrt{2}$
- C) 4
- D) 8
- E) $\sqrt{8}$

12. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera?

- A) $\log 1 \cdot \log 5 = \log 5$
- B) $\log 10 : \log 2 = \log 5$
- C) $\log \frac{1}{3} \cdot \log 6 = \log 2$
- D) $\log \frac{1}{10} < 0$
- E) $\frac{\log 5}{\log 4} = \log 5 - \log 4$

13. Si $\log_5 3 = \frac{7}{10}$, entonces $\log_5 75$ es igual a

- A) Faltan datos para determinarlo
- B) $\frac{27}{10}$
- C) 5
- D) 6
- E) Ninguna de las anteriores

14. Si $4 \log a = 1$, entonces $\log \sqrt{a} =$

- A) 2

- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{1}{8}$
- E) $\frac{1}{16}$

15. Se puede determinar el valor de 25^x si:

- (1) Se conoce el valor de $\log_x 8$.
 - (2) Se conoce el valor de 3^{3x} .
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Ejemplos Págs.	1	2	3	4
1	C	A		
2	B	D	D	A
3	E	C	B	
4	E	A	D	
5	A	C		

CLAVES PÁG. 6

- 1. E 6. C 11. D
- 2. E 7. A 12. D
- 3. D 8. B 13. B
- 4. C 9. A 14. D
- 5. D 10. E 15. D