GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 18

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

LENGUAJE ALGEBRAICO Y PRODUCTOS NOTABLES

Álgebra es una rama de la Matemática en la que se usan letras, números y símbolos para representar relaciones aritméticas. Dado que el álgebra tiene su estructura y reglas, podemos considerarla también como el **idioma** o **lenguaje** de las matemáticas.

1. TÉRMINO ALGEBRAICO:

Término Algebraico, es un conjunto de números y letras que se relacionan entre sí por medio de la multiplicación y/o división. El término Algebraico consta de un **coeficiente numérico** y de un **factor literal (letras)**. Si el coeficiente numérico no está escrito, entonces es 1.

2. EXPRESIÓN ALGEBRAICA:

Es la representación en **lenguaje matemático** de **proposiciones verbales.** Para ello se puede utilizar: letras, números y operaciones. También podemos decir que una expresión algebraica es la suma o resta de términos algebraicos.

- Si la expresión algebraica tiene un término, se llama MONOMIO.
- Si la expresión algebraica tiene dos términos, se llama BINOMIO.
- Si la expresión algebraica tiene dos o más términos, se llama MULTINOMIO (POLINOMIO).

EJEMPLOS

1) Identificar:

	Coeficiente Numérico	**Factor Literal**
$-a^2bc^3$		
0,1xyz		
$\frac{mn^2}{3}$		

2) Escribir en lenguaje matemático

Proposición Verbal	**Lenguaje Matemático**
La suma entre el cuadrado del doble de **n** y el cubo de la tercera parte de **m** es	
La diferencia entre el doble del cuadrado de **n** y el triple del cubo de **m** es	
El exceso de **n** sobre la quinta parte de **m** es	

3. **EVALUACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS**

Evaluar una expresión algebraica consiste en **sustituir** las letras por los **valores** numéricos dados, para luego realizar las operaciones indicadas. Esta sustitución va siempre entre paréntesis.

4. **TÉRMINOS SEMEJANTES**

Son aquellos que tienen **idéntico factor literal**, es decir tienen las mismas letras, y los mismos exponentes, sólo pueden diferir en el coeficiente numérico.

Ejemplos:

- $3xy$; $-xy$; $\frac{xy}{4}$; $0,2xy$
- $\frac{2a^3bc}{3}$; $-4a^3bc$; $-a^3bc$; $\frac{a^3bc}{3}$

5. **REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES**

Para reducir términos semejantes basta sumar o restar sus coeficientes numéricos y mantener su factor literal.

EJEMPLOS

1) Evaluar las siguientes expresiones algebraicas:

Expresión Algebraica	a= -2; b= -3; c=4	a= 3; b=-4; c=1
$ab^2 - a^3 : c$		
$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$		

2. $x - 2y + 3z - 4 - 2x + 4y - z + 3 =$

A) $-x + 2y - 2z - 1$
B) $-x - 2y + 2z - 1$
C) $-x + 2y + 2z - 1$
D) $x + 2y + 2z - 1$
E) $-x + 2y + 2z + 1$

3. $a^2b - \frac{1}{3}ab^2 - \frac{1}{4}a^2b + \frac{2}{3}ab^2 - 1 =$

A) $\frac{3}{4}ab^2 + \frac{1}{3}a^2b - 1$

B) $\frac{3}{4}a^4b^2 + \frac{1}{3}a^4b - 1$

C) $\frac{3}{4}ab^2 - \frac{1}{3}a^2b - 1$

D) $\frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{3}ab^2 - 1$

E) $-\frac{3}{4}ab^2 + \frac{1}{3}a^2b - 1$

6. USO DE PARÉNTESIS

En Álgebra los paréntesis se usan para agrupar términos y separar operaciones. Los paréntesis se pueden eliminar de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si un paréntesis es precedido de un **signo +,** este se puede eliminar sin variar los signos de los términos que están dentro del paréntesis.

- Si un paréntesis es precedido por un **signo –,** este se puede eliminar cambiando los signos de cada uno de los términos que están al interior del paréntesis.

- Si una expresión algebraica tiene términos agrupados entre paréntesis y ellos a su vez se encuentran dentro de otros paréntesis, se deben resolver las operaciones que anteceden a los paréntesis desde adentro hacia fuera.

EJEMPLOS:

1. Elimine paréntesis y reduzca los términos semejantes: $-\left[\frac{a}{3} - \{-\frac{b}{2} - (1 - c)\} - b\right] =$

   A) $-\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c + 1$

   B) $-\frac{a}{3} + \frac{3}{2}b + c - 1$

   C) $-\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c - 1$

   D) $-\frac{a}{3} + \frac{b}{2} - c - 1$

   E) $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c - 1$

2. Simplifique : $0,2a + [(3,4a - 2,5) - (2,3a - 0,7)] + 0,2=$

   A) $1,3a - 1,6$

   B) $1,3a - 8,4$

   C) $-1,3a + 1,6$

   D) $1,3a + 1,6$

   E) $-1,3a - 1,6$

3. Reduzca la siguiente expresión algebraica: $3x + 2y - \{2x - [3x - (2y - 3x) - 2x] - y\} =$

   A) $5x + 5y$
   B) $5x + y$
   C) $-7x + 5y$
   D) $7x - 5y$
   E) $5x - y$

OPERATORIA ALGEBRAICA

ADICIÓN DE POLINOMIOS

Para sumar polinomios se aplican los axiomas de **asociatividad** y **conmutatividad** (de la adición en IR) para reordenar los términos y agrupar los semejantes, y luego el axioma de **distributividad** para sumar estos últimos entre sí.
Para restar polinomios, se aplica la definición de sustracción en IR. (se cambia el signo del sustraendo).
En otras palabras para sumar y/o restar polinomios se aplican todas las reglas de reducción de términos semejantes y uso de paréntesis.

EJEMPLOS

1. Si $A = 2x^2 + 3x + 7$ y $B = 5x^2 - 7x - 4$, entonces $-2(A + B) =$

A) $6x^2 - 20x - 20$
B) $-14x^2 - 8x - 6$
C) $-14x^2 + 8x - 6$
D) $-14x^2 - 20x - 6$
E) $-6x^2 - 20x - 20$

2. Al restar la expresión $-(1 - a)$ de $-(-a)$, se obtiene

A) 1
B) -1
C) $-2a + 1$
D) $-2a - 1$
E) $2a - 1$

3. $(1,\overline{1}a - 2,\overline{3}b) + (0,0\overline{1}a + 0,0\overline{3}b) =$

A) $\dfrac{101a}{90} - \dfrac{23b}{10}$

B) $\dfrac{11a}{9} - \dfrac{18b}{9}$

C) $\dfrac{11a}{9} + \dfrac{18b}{9}$

D) $\dfrac{101a}{9} - \dfrac{23b}{10}$

E) $\dfrac{101a}{90} - \dfrac{23b}{90}$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

1. **MONOMIO POR MONOMIO:**
Se multiplican los coeficientes numéricos entre sí y los factores literales entre sí, usando propiedades de potencias. En el caso de multiplicar un monomio por un producto de monomios se multiplica sólo por uno de ellos.

Es decir, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2. **MONOMIO POR POLINOMIO:**
Se multiplica el monomio por cada término del polinomio.

Es decir, $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

3. **POLINOMIO POR POLINOMIO:**
Se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y se reducen los términos semejantes, si los hay.

EJEMPLOS

1. $(\frac{2}{5}xy^2z)\ (\frac{25}{4}x^2y)\ (-2\ yz^{-3}) =$

A) $-5x^{-3}y^4z^{-2}$
B) $-5x3y^{-4}z^{-2}$
C) $5x^{-3}y^4z^{-2}$
D) $-5x^3y^4z^{-2}$
E) $5x^3y^4z^{-2}$

2. $(-2ab)(a^2b - 3ab^3) =$

A) $-2a^3b^2 - 6a^2b^4$
B) $2a^3b^2 + 6a^2b^4$
C) $-2a^3b^2 - 6a^2b^6$
D) $-2a^3b^2 + 6a^2b^4$
E) $2a^3b^2 + 6a^2b^6$

3. $(a - 1)\ (a^n + a^{n+1} + a^{n+2}) =$

A) $-a^n + a^{n+3}$
B) $a^n + a^{3n}$
C) $a^n - 2a^{2n}$
D) $a^n + a^{n+3}$
E) $a^n - a^{n+3}$

CUADRADO DE BINOMIO

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más o menos el doble producto del primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLOS

1. $(1 + 2x)^2 =$

A) $1 + 4x + 2x^2$
B) $1 + 4x^2$
C) $4x + 1 + 4x^2$
D) $1 + 2x + 4x^2$
E) $1 + 2x + 2x^2$

2. $(3a - \frac{b}{5})^2 =$

A) $9a^2 - \frac{6}{5}ab + \frac{b^2}{25}$

B) $9a^2 + \frac{6}{5}ab + \frac{b^2}{25}$

C) $9a^2 - \frac{6}{5}ab - \frac{b^2}{25}$

D) $9a^2 - \frac{6}{5}ab + \frac{b^2}{5}$

E) $9a^2 + \frac{6}{5}ab + \frac{b^2}{5}$

3. Si $(m - 3n)^2 = p + q$, entonces $(3n - m)^2 =$

A) $-p + q$
B) $p - q$
C) $-p - q$
D) $p + q$
E) Otro valor

SUMA POR DIFERENCIA

El producto de la suma por la diferencia entre dos términos es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.

$$\boxed{(x + y)(x - y) = x^2 - y^2}$$

EJEMPLOS

1. $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) =$

   A) -1
   B) 1
   C) $2\sqrt{2}$
   D) $1 - 2\sqrt{2}$
   E) $1 + 2\sqrt{2}$

2. $(2x + \frac{3}{y})(2x - \frac{3}{y}) =$

   A) $2x^2 - \frac{3}{y^2}$
   B) $2x^2 - \frac{3}{y^2}$
   C) $4x^2 - \frac{3}{y^2}$
   D) $4x^2 - \frac{9}{y^2}$
   C) $4x^2 - \frac{9}{y}$

3. En el cuadrado ABCD de lado x (figura 1), $\overline{EF} \,//\, \overline{AB}$ y $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$. Entonces, la diferencia positiva de las regiones no sombreadas equivale a

   A) $x^2 - 4$
   B) $4 - x^2$
   C) $x(x + 8)$
   D) $x(x - 8)$
   E) $(x - 4)^2$

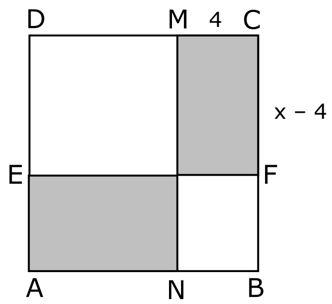

Fig. 1

CUBO DE BINOMIO

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más o menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo término, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más o menos el cubo del segundo.

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$$

EJEMPLOS

1. $(1 + x)^3 =$

   A) $1 + x^3$
   B) $1 + 9x^2 + 3x + x^3$
   C) $1 + 3x + x^2 + x^3$
   D) $1 + 3x + 3x^2 + x^3$
   E) $1 + 9x + 3x^2 + x^3$

2. $\left(x - \dfrac{2}{x} \right)^3 =$

   A) $x^3 - 6x + \dfrac{12}{x} - \dfrac{8}{x^3}$
   B) $x - 6x - \dfrac{12}{x} - \dfrac{8}{x^3}$
   C) $x - 12x + \dfrac{6}{x} - \dfrac{8}{x^3}$
   D) $x - 12x + \dfrac{6}{x} + \dfrac{8}{x^3}$
   E) $x^3 - \dfrac{8}{x^3}$

3. $(1 - a^4)^3 =$

   A) $1 - a^{12}$
   B) $1 - 3a^4 + a^8 + a^{12}$
   C) $1 - 3a^4 + 3a^8 - a^{12}$
   D) $1 - 3a^4 - 3a^8 - a^{12}$
   E) $1 - 3a^4 + 3a^8 + 3a^{12}$

BINOMIOS CON TÉRMINO COMÚN

El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común, más el producto del término común con la suma algebraica de los otros dos términos, más el producto de los términos no comunes.

$$\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$$

EJEMPLOS

1. $(x - 5)(x + 2) =$

   A) $x^2 + 3x - 10$
   B) $x^2 - 3x + 10$
   C) $x^2 - 3x - 10$
   D) $x^2 - 10$
   E) $x^2 - 3x$

2. $(2z + 1)\left(2z - \frac{1}{2}\right) =$

   A) $4z^2 + z - \frac{1}{2}$
   B) $2z^2 + z - \frac{1}{2}$
   C) $4z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$
   D) $4z^2 + z + \frac{1}{2}$
   E) $4z^2 - \frac{1}{2}$

3. $(0,2x - 0,1)(0,2x + 1) =$

   A) $0,4x^2 + 0,18x - 0,1$
   B) $0,4x^2 - 0,18x - 0,1$
   C) $0,04x^2 + 0,18x - 0,1$
   D) $0,04x^2 + 0,18x + 0,1$
   E) $0,4x^2 + 0,18x + 0,1$

EJERCICIOS

1. Al simplificar la expresión $4 - (2a + 3) + (4a + 5) - (7 - 3a)$, resulta igual a

A) $3a - 1$
B) $3a - 5$
C) $5a + 1$
D) $5a - 1$
E) $-a + 5$

2. "La suma entre el triple de un número **p** y un tercio de dicho número", se expresa como

A) $3p + \frac{1}{3}$
B) $3p + \frac{p}{3}$
C) $p^3 + \frac{1}{3}$
D) $p^3 + \frac{p}{3}$
E) $p^3 + 3p$

3. Al escribir en lenguaje algebraico la diferencia entre el triple de **a** y el cuadrado de **b** resulta

A) $3a - b^2$
B) $3(a - b^2)$
C) $(3a - b)^2$
D) $b^2 - 3a$
E) $a^3 - b^2$

4. Si $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{1}{3}$, entonces el valor de la expresión $a - b : c$ es

A) $\frac{21}{20}$
B) $\frac{37}{60}$
C) $-\frac{1}{3}$
D) $-\frac{9}{5}$
E) $-\frac{9}{20}$

5. Si $a = 10$ y $b = 6$, entonces el valor de $a^2 - 2ab + b^2$ es

A) 8
B) 16
C) 256
D) 336
E) -16

6. La frase: “el doble del cuadrado de un número **y** es igual al quíntuplo de la diferencia entre el número y su mitad”, queda expresada como

A) $2y^2 = \frac{1}{5}\left(y - \frac{y}{2}\right)$

B) $(2y)^2 = 5\left(y - \frac{y}{2}\right)$

C) $2y^2 = 5\left(y - \frac{y}{2}\right)$

D) $2y^2 = \left(y - \frac{y}{2}\right)^5$

E) $y^2 = \left(y - \frac{y}{2}\right)$

7. Al multiplicar $\left(4x + \frac{1}{2}y\right)\left(4x - \frac{1}{4}y\right)$ el coeficiente del término **xy** es

A) $\frac{1}{2}$
B) 1
C) $-\frac{1}{2}$
D) -1
E) $-\frac{1}{8}$

8. Si el área de un rectángulo es $a^2 + ab$ y su ancho es a, entonces el largo es

A) $a^2 + b$
B) $a + b$
C) $2a + b$
D) b
E) $a - b$

9. La figura 1, muestra dos cuadrados de lados **x** y **4**. Luego, la diferencia positiva de sus áreas queda representada por

A) $(x + 4)(x + 4)$
B) $(-x - 4)(x + 4)$
C) $(x + 2)(x - 2)$
D) $(4 - x)(4 + x)$
E) $(x + 4)(x - 4)$

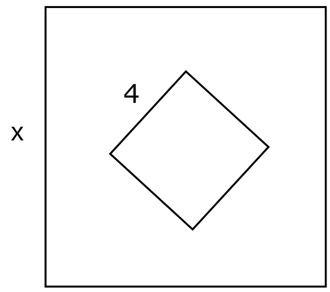

Fig. 1

10. La base de un triángulo mide $(2x + 3)$ y su altura correspondiente es $(2x + 2)$, ¿cuál es el área de este triángulo en función de x?

A) $2x^2 + 10x + 6$
B) $2x^2 + 5x + 3$
C) $2x^2 + 3x + 3$
D) $4x^2 + 10x + 6$
E) $2x + 3$

11. Carlos tiene tres años más que Martín y Jorge tiene el cuadrado de la suma de las edades de Carlos y Martín. Si la edad de este último es **x**, entonces la edad de Jorge en función de la edad de Martín es

A) $4x^2 + 12x - 9$
B) $4x^2 + 12x + 9$
C) $4x^2 - 12x - 9$
D) $4x^2 - 12x + 9$
E) $4x^2 + 9$

12. La figura 3, muestra un estanque sin tapa empleado en regadío. ¿Cuál es el área interior del estanque en forma de polinomio?

A) $288 - 48x$
B) $144 + 48x - 4x^2$
C) $133 - 24x$
D) $144 - 4x^2$
E) $4x^3 - 48x^2 + 144x$

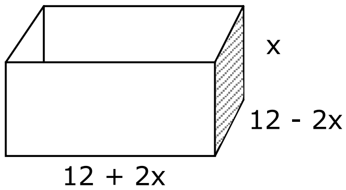

Fig. 3

13. La figura 4, muestra una caja desplegada, ¿cuál es el área total?

(1) El área de la región sombreada es 294 cm^2.

(2) $5x + 3 = 38$

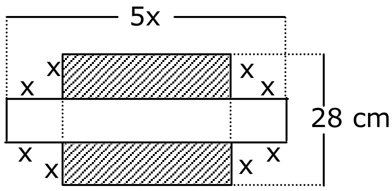

Fig. 4

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

14. ¿Cuál es el valor de $a^2 - b^2$?

(1) El 50% de $(a + b)$ es 40.

(2) El 25% de $(a - b)$ es 5.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

15. ¿Cuál es el valor de $3a - 5b - 3$?

(1) $3a = 5b$

(2) $a = -3$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

<table>
<tr><th>Ejemplos / Págs.</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>1</td><td><table><tr><th></th><th>Factor numérico</th><th>Factor literal</th></tr><tr><td>1</td><td>-1</td><td>a^2bc^3</td></tr><tr><td>2</td><td>0,1</td><td>xyz</td></tr><tr><td>3</td><td>1/3</td><td>mn^2</td></tr></table></td><td><table><tr><th></th><th>Lenguaje Matemático</th></tr><tr><td>1</td><td>$(2n)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3$</td></tr><tr><td>2</td><td>$2n^2 - 3m^3$</td></tr><tr><td>3</td><td>$n - \frac{m}{5}$</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td><table><tr><th></th><th>a= -2; b= -3; c= 4</th><th>a= 3; b= -4; c= 1</th></tr><tr><td>1</td><td>-16</td><td>21</td></tr><tr><td>2</td><td>-5/12</td><td>-5/12</td></tr></table></td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td>3</td><td>C</td><td>A</td><td>B</td></tr>
<tr><td>4</td><td>C</td><td>A</td><td>A</td></tr>
<tr><td>5</td><td>D</td><td>D</td><td>A</td></tr>
<tr><td>6</td><td>C</td><td>A</td><td>D</td></tr>
<tr><td>7</td><td>A</td><td>D</td><td>D</td></tr>
<tr><td>8</td><td>D</td><td>A</td><td>C</td></tr>
<tr><td>9</td><td>C</td><td>A</td><td>C</td></tr>
</table>

CLAVES PÁG. 10

1.	D	6.	C	11.	B
2.	B	7.	B	12.	B
3.	A	8.	B	13.	D
4.	E	9.	E	14.	C
5.	B	10.	B	15.	A