

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 22

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

DESIGUALDADES – INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

DESIGUALDADES

DEFINICIONES

Sean a y b números reales. Entonces:

$a < b$ si, y sólo si, $a - b < 0$

$a > b$ si, y sólo si, $a - b > 0$

$a \leq b$ si, y sólo si, $a < b$ ó $a = b$

$a \geq b$ si, y sólo si, $a > b$ ó $a = b$

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Sean a, b, c y d números reales

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$

$a > b$ si, y sólo si, $-a < -b$

Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$

Si $a > b$ y $c > d$, entonces $(a + c) > (b + d)$

Si $a > b$ y ambos son positivos o negativos,

entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

EJEMPLOS

$-5 < 4$ ya que $-5 - 4 < 0$

$7 > 2$ ya que $7 - 2 > 0$

$-3 \leq -3$ ya que $-3 = -3$

$6 \geq -7$ ya que $6 > -7$

EJEMPLOS

Como $2 > -3$ y $8 > 2$, se deduce que $8 > -3$

Como $5 > 3$, se tiene que $5 + 2 > 3 + 2$

Puesto que $7 > 5$, se tiene que $7 \cdot 2 > 5 \cdot 2$

De $5 > -3$, se concluye que $-5 < 3$

Como $-3 \neq 0$, se tiene que $(-3)^2 > 0$

Como $6 > -3$ y $8 > 5$ se concluye que $6 + 8 > -3 + 5$

De $-\frac{1}{4} > -\frac{2}{3}$, se concluye que $-4 < -\frac{3}{2}$

EJEMPLO

1. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces ¿cuál de las siguientes opciones es siempre verdadera?

- A) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- B) $a^2 > c^2$
- C) $b^2 > c^2$
- D) $a^2c < b^2c$
- E) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Inecuación es toda desigualdad en la que existen cantidades desconocidas llamadas incógnitas. Resolver una inecuación lineal con una incógnita es encontrar el conjunto de valores de la cantidad desconocida que verifican la desigualdad. Este conjunto se llama **conjunto solución** de la inecuación y se puede representar mediante la notación de conjunto, gráfica o intervalo.

Por ejemplo: 1) Resolver $3x + 5 < x - 7$
Sol.: $3x - x < -7 - 5 \Rightarrow 2x < -12 \Rightarrow x < -6$

Por lo tanto el conjunto solución en **notación conjuntista** es: $S = \{x \in \mathbb{R} / x < -6\}$

Su representación **gráfica** en la recta numérica es:

Se dice que S es un **intervalo** abierto, pues no tiene primer ni último elemento y se anota: $S =] -\infty, -6[$

2) Resolver $x + 8 \geq 5x - 12$
Sol.: $-4x \geq -20$
 $x \leq 5$

Se dice que el conjunto solución S es un intervalo semiabierto, pues no tiene un primer elemento pero sí un último elemento (5) y se anota: $S =] -\infty, 5] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5\}$

EJEMPLOS

1. Si $2x - 3 > 5 - 2x$, entonces su conjunto solución es

- A) $\{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$
- B) $\{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$
- C) $\{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$
- D) $\{x \in \mathbb{R} / x < -2\}$
- E) Ninguna de las anteriores

2. La representación gráfica del conjunto solución de la inecuación $\frac{1 - 2x}{5} \leq \frac{7 + 2x}{3}$ es

- A)
- B)
- C)
- D)
- E)

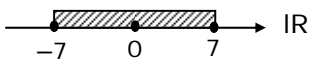
INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

$$|x| \leq a \text{ si y sólo si } -a \leq x \leq a$$

Por ejemplo: resolver $|x| \leq 7$

$$\text{Sol.: } |x| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 7$$

Por lo tanto el conjunto solución $S = \{x \in \mathbb{R} / -7 \leq x \leq 7\}$

Su representación gráfica e la recta numérica es:  IR

Se dice que S es un intervalo cerrado pues tiene primer elemento (-7) y último elemento (7) y se anota: $S = [-7, 7]$

$$|x| \geq a \text{ si y sólo si } x \leq -a \text{ o } x \geq a$$

Por ejemplo: Resolver $|x| \geq 4$

$$\text{Sol.: } |x| \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ \text{o} \\ x \geq 4 \end{cases}$$

Por lo tanto el conjunto solución $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -4 \text{ ó } x \geq 4\}$

Su representación gráfica en la recta numérica es  IR

La solución S es la unión de intervalos: $S =]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$

EJEMPLOS

1. ¿Cuántos números enteros hay en el conjunto solución de la inecuación $|x - 6| < 4$?

- A) Ninguno
- B) 4
- C) 6
- D) 7
- E) 8

2. El conjunto solución de la inecuación $|x - 1| > 5$ es

- A) $\{x \in \mathbb{R} / x < -4 \text{ ó } x > 6\}$
- B) $\{x \in \mathbb{R} / x < -6 \text{ ó } x > 4\}$
- C) $\{x \in \mathbb{R} / x < 4 \text{ ó } x > 6\}$
- D) $\{x \in \mathbb{R} / -4 < x < 6\}$
- E) $\{x \in \mathbb{R} / -6 < x < 4\}$

SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son aquellos que están formados por dos o más inecuaciones.

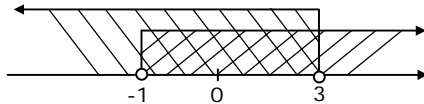
Para encontrar el conjunto solución, se resuelve cada inecuación por separado y se realiza la intersección de los conjuntos solución.

Por ejemplo: Resolver :
$$\begin{cases} 2x + 3 > 1 & (1) \\ 3x - 4 < 5 & (2) \end{cases}$$

De (1):
$$\begin{aligned} 2x &> 1 - 3 \\ 2x &> -2 \\ x &> \frac{-2}{2} \\ x &> -1 \end{aligned}$$

De (2):
$$\begin{aligned} 3x &< 5 + 4 \\ 3x &< 9 \\ x &< \frac{9}{3} \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Gráficamente:



La solución del sistema corresponde al conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\}$

EJEMPLOS

1. El conjunto solución, en los números naturales, del sistema
$$\begin{cases} 5x + 2 > -8 \\ 3x - 11 < 7 \end{cases}$$
 es

- A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- C) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- D) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- E) $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2. ¿Cuántos números enteros tiene el conjunto solución del sistema
$$\begin{cases} x + 15 > 2x + 10 \\ -3x - 8 \leq 6 + 4x \end{cases}?$$

- A) Ninguno
- B) 3
- C) 5
- D) 7
- E) Infinitos

PROBLEMAS DE INECUACIONES

En estos problemas aparecen expresiones que hay que traducir a los símbolos $>$, $<$, \geq o \leq , tales como: "a lo menos" (\geq), "cuando mucho" (\leq), "como mínimo" (\geq), "como máximo" (\leq), "sobrepasa" ($>$), "no alcanza" ($<$), etc. Una vez planteada la inecuación o sistema de inecuaciones, se determina el conjunto solución, y al igual que en los problemas de ecuaciones hay que fijarse en la pregunta del problema.

EJEMPLOS

1. Un artesano tiene x collares, vende 60 y le quedan más de la mitad. Tras esta venta, fabrica 5 collares más, vende 27 y le quedan menos de 40 collares. ¿Cuántos collares fabricó en total?
 - A) 120
 - B) 121
 - C) 125
 - D) 126
 - E) 127

2. ¿Cuántos números enteros cumplen simultáneamente con las dos condiciones siguientes?
 - I) El triple del número no supera su mitad, aumentada en 25 unidades.
 - II) El exceso del cuádruplo del número sobre 2 supera las 6 unidades.
 - A) 6
 - B) 7
 - C) 8
 - D) 9
 - E) 10

3. La señora **X** pesa 20 kilos más que su esposo **Y** y el doble que su hijo **Z**. Si entre los tres pesan a lo menos 180 kg, ¿cuál es el peso mínimo del señor **Y**?
 - A) 60 kg
 - B) 50 kg
 - C) 40 kg
 - D) 30 kg
 - E) 20 kg

EJERCICIOS

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, y $a - b > 0$, ¿cuál de las siguientes desigualdades es siempre verdadera?
- A) $a \cdot b > 0$
 - B) $a > 0$
 - C) $a^2 > b^2$
 - D) $4b < 2a$
 - E) $a > b$
2. Si a es número negativo, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?
- I) $a^3 < a^2$
 - II) $a + \frac{1}{a} < 0$
 - III) $a = \sqrt{a^2}$
- A) Sólo I
 - B) Sólo II
 - C) Sólo I y II
 - D) Sólo II y III
 - E) I, II y III
3. En el conjunto de los números reales, la expresión $-4 < x < 4$ es equivalente con
- I) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 - II) $] -4, 4[$
 - III) $|x| < 4$
- A) Sólo I
 - B) Sólo II
 - C) Sólo I y II
 - D) Sólo II y III
 - E) I, II y III
4. El conjunto solución de la inecuación $3 - 2x \leq -7$ es
- A) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 5\}$
 - B) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -5\}$
 - C) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\}$
 - D) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -10\}$
 - E) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -5\}$

5. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) siempre es verdadera(s)?

- I) $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$
- II) $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$
- III) $x > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y III
- E) Ninguna de ellas

6. Si $A = \{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 \geq 4x - 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / 3x + 5 \geq 5 + 2x\}$, entonces el conjunto $A \cap B$ es

- A) $[0, 1]$
- B) $[-1, 0]$
- C) $[-1, 1]$
- D) $]0, 1[$
- E) $] -1, 0[$

7. Si x es un número real, el conjunto solución de $|3x + 2| \leq 2$ es

- A) $\{0\}$
- B) $\left\{ \frac{4}{3} \right\}$
- C) $\left[\frac{4}{3}, 0 \right]$
- D) \emptyset
- E) $\mathbb{R} - \left] \frac{4}{3}, 0 \right[$

8. Al resolver el sistema $\begin{cases} -5 < x - 2 < 5 \\ 3 + x > 1 \end{cases}$ se obtiene como conjunto solución

- A) $[-2, 7]$
- B) $] -2, 7 [$
- C) $[-1, 2]$
- D) $] -1, 2 [$
- E) $[-1, 7 [$

9. El doctor le dice a Mónica que debe bajar por lo menos 10 kilos. Si el peso actual de Mónica es P_a y su peso ideal es P_i , ¿cuál de las siguientes desigualdades es siempre verdadera?
- A) $P_i > P_a - 10$ kilos
 - B) $P_i \leq P_a - 10$ kilos
 - C) $P_i \geq P_a - 10$ kilos
 - D) $P_i < P_a - 10$ kilos
 - E) $P_a \leq P_i - 10$ kilos
10. Sean p , q y r números reales. Si $p > r - 1$ y $q \geq r - 1$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) siempre verdadera(s)?
- I) $p > q$
 - II) $p + q > 2(r - 1)$
 - III) $q > r$
- A) Sólo I
 - B) Sólo II
 - C) Sólo I y III
 - D) Sólo II y III
 - E) I, II y III
11. ¿Cuántos números naturales cumplen la condición: el exceso del quintuplo del número sobre 4 es menor que 31?
- A) 4
 - B) 5
 - C) 6
 - D) 7
 - E) 8
12. Se desea confeccionar un marco rectangular cuyo perímetro sea menor a 120 cm, pero no menor que 90 cm. Si el largo es el doble del ancho, ¿entre qué valores, en cm, variará el ancho k ?
- A) $15 \leq k < 20$
 - B) $15 \leq k \leq 20$
 - C) $30 \leq k < 40$
 - D) $30 \leq k \leq 40$
 - E) $45 \leq k < 60$

13. ¿Cuántos números enteros cumplen simultáneamente con las condiciones siguientes?
- I) El doble del número, más 1 es mayor que 3.
 II) El triple del número, más 2 no es mayor que 23.
- A) 4
 B) 5
 C) 6
 D) 7
 E) Infinitos
14. El IMC es la razón entre la masa corporal y el cuadrado de la estatura de una persona, respectivamente. Diversos estudios realizados, han concluido que el grupo de mejor salud corresponde a un IMC comprendido entre 20 y $25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$. Si una persona mide 1,5 m, para ser considerada saludable, su masa corporal deberá estar entre
- A) 30 kg y 37,5 kg
 B) 30 kg y 56,25 kg
 C) 40 kg y 50 kg
 D) 45 kg y 56,25 kg
 E) 45 kg y 55 kg
15. Un comerciante compra una partida de 130 camisas por un total de \$ 500.000. Vende al detalle 50 de estas camisas a \$ 6.000 cada una. ¿Cuál es el menor precio al que debe vender cada una de las camisas restantes si quiere obtener, como mínimo, un 30% de ganancia?
- A) \$ 2.500
 B) \$ 3.250
 C) \$ 3.750
 D) \$ 4.325
 E) \$ 4.375

RESPUESTAS

Ejemplos Págs.	1	2	3
1	E		
2	B	A	
3	D	A	
4	B	D	
5	D	C	A

CLAVES PÁG. 6

1. E 6. A 11. C
 2. C 7. C 12. A
 3. D 8. B 13. C
 4. C 9. B 14. D
 5. B 10. B 15. E

