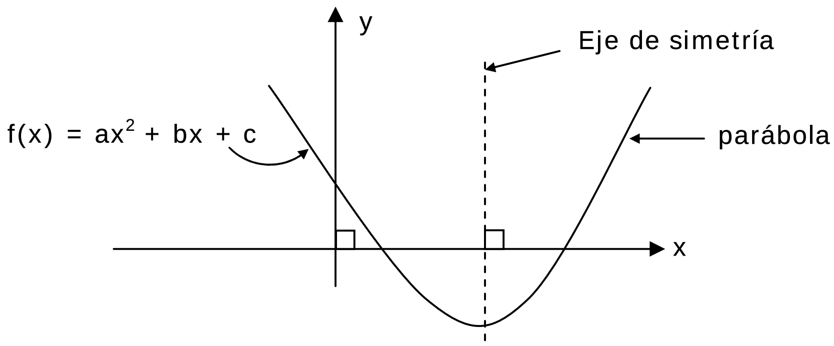
GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº28

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

FUNCIÓN CUADRÁTICA

A la función de segundo grado $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, siendo a, b, c $\in$ IR y $a \neq 0$ se le denomina **función cuadrática**.

La representación gráfica de una función cuadrática es una **parábola**, simétrica con respecto a una recta paralela al eje de las ordenadas. Dicha recta recibe el nombre de **eje de simetría**.

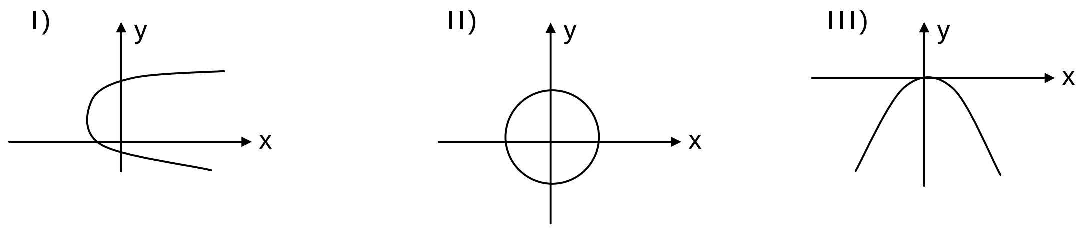


EJEMPLOS

1. ¿Cuál de las siguientes opciones representa una función cuadrática?

   A) $f(x) = x^2 + 5 - (x^2 + 2x)$
   B) $f(t) = -3t + 2t^3$
   C) $f(p) = \frac{1}{2}p + 4$
   D) $f(a) = (a + 2)(a - 2) - a^2$
   E) $f(m) = (-2m + 1)^2$

2. De las gráficas siguientes ¿cuál(es) de ellas pertenece(n) a una función cuadrática?



   A) Sólo I
   B) Sólo III
   C) Sólo II y III
   D) Todas ellas
   E) Ninguna de ellas

2. FUNCIONES DE LA FORMA $\boxed{y = ax^2}$

i) $y = x^2$ (fig. 1)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

2i) $y = \frac{1}{2}x^2$ (fig. 1)

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

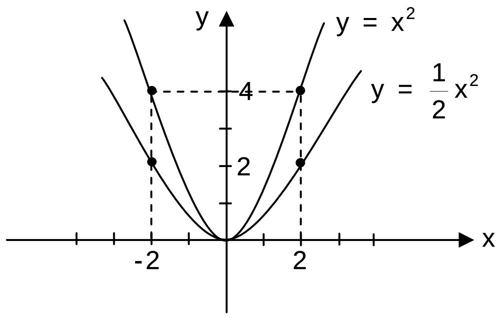


Fig. 1

3i) $y = -x^2$ (fig. 2)

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

4i) $y = -\frac{1}{2}x^2$ (fig. 2)

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

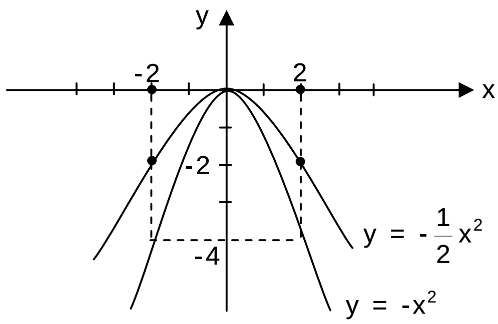


Fig. 2

OBSERVACIONES: - Si $|a| > 1$, la gráfica de $y = ax^2$ es más “angosta” que la gráfica de $y = x^2$.
- Si $0 < |a| < 1$, la gráfica de $y = ax^2$ es más “ancha” que la gráfica de $y = x^2$.
- Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba (sentido positivo del eje y).
- Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo (sentido negativo del eje y).

EJEMPLO

En la figura 3, se muestran tres gráficas de funciones cuadráticas. ¿Cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s)?

I) $a > b$
II) $|a| = |c|$
III) $|b| > |c|$

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Todas ellas
E) Ninguna de ellas

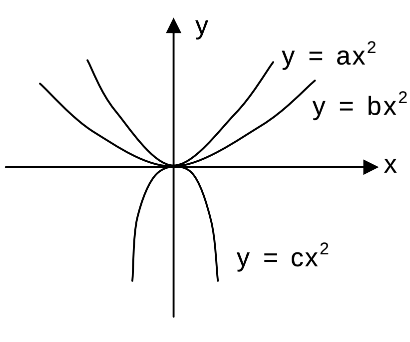


Fig. 3

FUNCIONES DE LA FORMA

$$\boxed{y = ax^2 + c}$$

La figura 1, muestra las gráficas de $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 3$.

- Se observa que si la curva corta al eje y, x se hace 0, y resulta $y = c$.
- Si $c > 0$, la parábola se desplaza c unidades hacia arriba con respecto al origen.
- Si $c < 0$, la parábola se desplaza c unidades hacia abajo con respecto al origen.

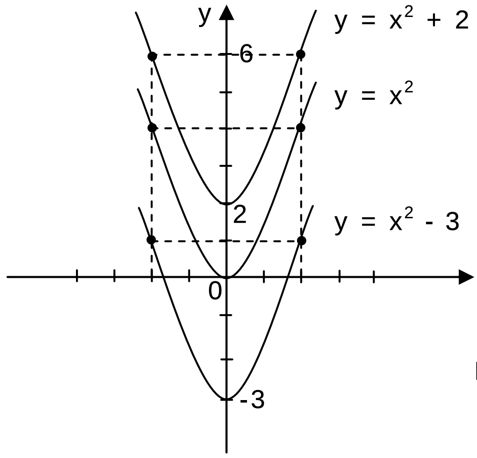


Fig. 1

EJEMPLOS

1. ¿Cuál es la función cuadrática cuya representación gráfica es la parábola de la figura 2?

   A) $y = 2x^2 - 2$
   B) $y = -x^2 - 4$
   C) $y = x^2 + 2$
   D) $y = -x^2 - 2$
   E) $y = -x^2 + 2$

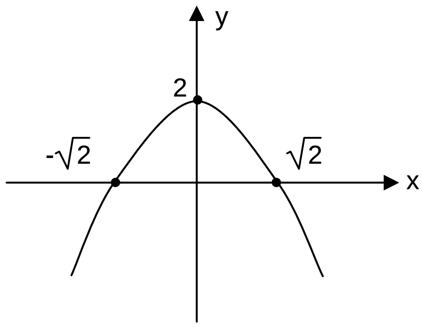


Fig. 2

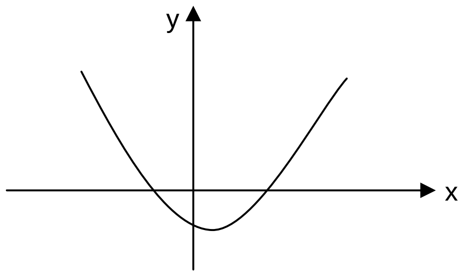
2. Al desplazar la parábola asociada a la función $y = x^2 + 2$, cinco unidades hacia abajo se obtiene la función

   A) $y = x^2 - 5$
   B) $y = -x^2 + 5$
   C) $y = x^2 - 3$
   D) $y = x^2 + 3$
   E) Ninguna de las anteriores

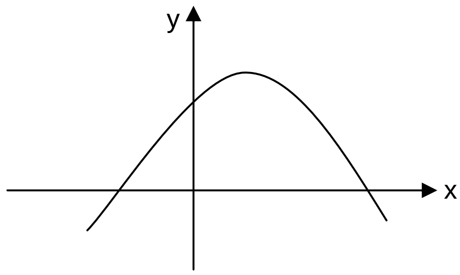
FUNCIONES DE LA FORMA $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

Concavidad: Es la abertura que tiene la parábola.

Si $a > 0$, la concavidad de la parábola está orientada hacia arriba.

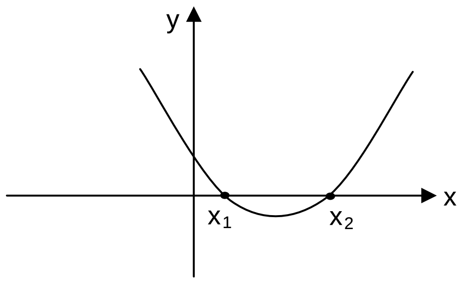


Si $a < 0$, la concavidad de la parábola está orientada hacia abajo.



CEROS DE LA FUNCIÓN

Los ceros (o raíces) de la función cuadrática son los valores x_1 y x_2 para los que $y = 0$.



EJEMPLO

Con respecto a la función $f(x) = 3x^2 + 13x - 10$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

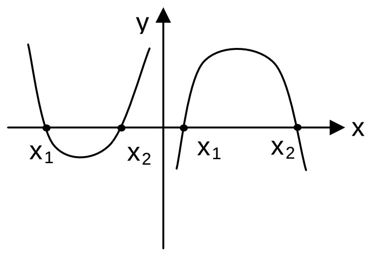
I) Su concavidad está orientada hacia arriba.
II) El punto de intersección con el eje y es (0, -10).
III) f(-2) = -24.

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) Todas ellas

DISCRIMINANTE

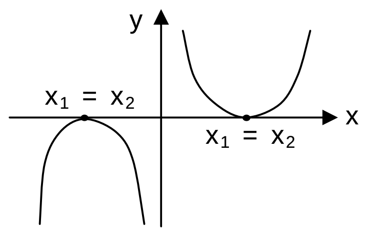
La expresión $\mathbf{b^2 - 4ac}$ se denomina **discriminante**, pues determina la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función $y = ax^2 + bx + c$

a) Si $\boxed{\mathbf{b^2 - 4ac > 0}}$



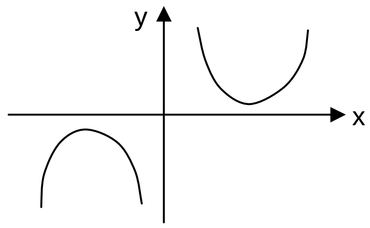
La parábola intersecta al eje x en dos puntos, por lo tanto tiene 2 soluciones (raíces reales distintas).

b) Si $\boxed{\mathbf{b^2 - 4ac = 0}}$



La parábola es tangente al eje x, por lo tanto tiene sus soluciones idénticas (una única solución real).

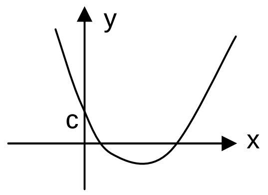
c) Si $\boxed{\mathbf{b^2 - 4ac < 0}}$



La parábola NO intersecta al eje x, no tiene solución real.

INTERSECCIÓN CON EL EJE Y

La parábola asociada a la función $y = ax^2 + bx + c$ siempre intersecta al eje de las ordenadas en $y = c$



EJEMPLOS

1. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera con respecto del discriminante de la ecuación asociada a la función $y = x^2 + x - 6$?

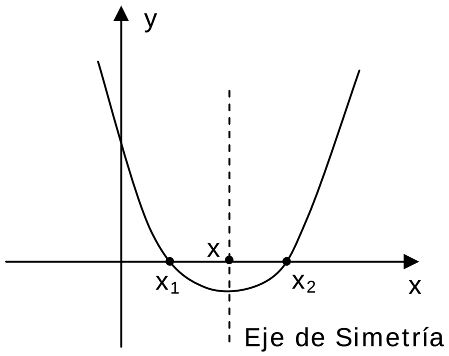
   A) Es mayor o igual a cero
   B) Es menor que cero
   C) Sólo es igual a cero
   D) No es una potencia de cinco
   E) No es un cuadrado perfecto

2. La gráfica de la función $f(x) = (-3x + 2)(1 - x)$ intersecta al eje y en

   A) $-\frac{2}{3}$
   B) 1
   C) -2
   D) -1
   E) 2

EJE DE SIMETRÍA

El eje de simetría de una parábola es una recta que divide a esta curva en dos “ramas” congruentes.



Eje de simetría:

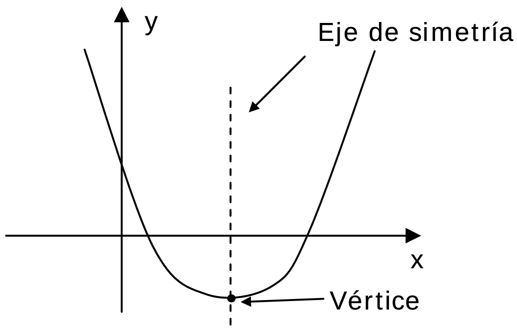
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

o

$$x = \frac{-b}{2a}$$

VÉRTICE DE LA PARÁBOLA

El vértice de la parábola es el punto de intersección de ésta con su eje de simetría.

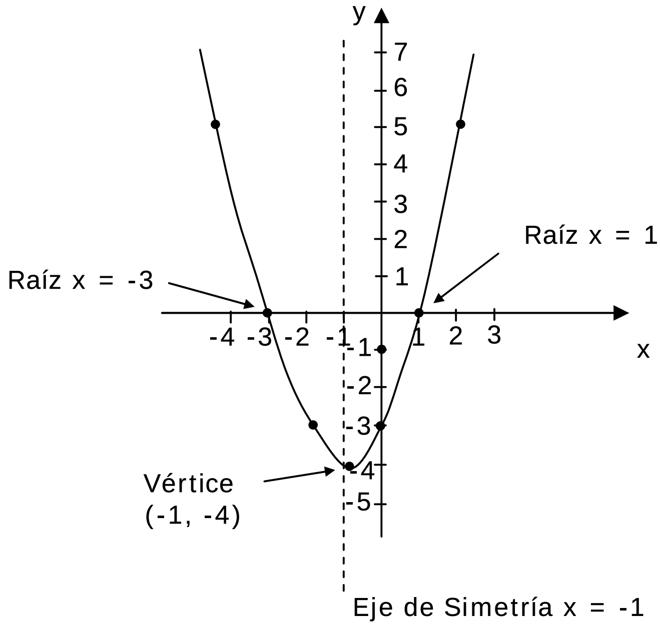


$$V = \left(\frac{-b}{2a} ; \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

EJEMPLO

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

f(x)	x
0	-3
-4	-1
-3	0
0	1
5	2



EJERCICIOS

1. El gráfico de la figura 1, podría corresponder a la función cuadrática

   A) $f(x) = x^2 + 2x$
   B) $f(x) = 3 + 2x - x^2$
   C) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
   D) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
   E) $f(x) = x^2 - 2x$

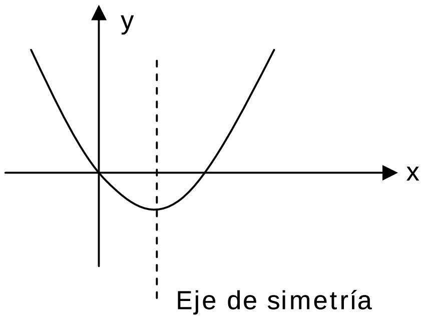


Fig. 1

2. Respecto a la parábola $f(x) = x^2 - 9x + 14$, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

   I) Sus ceros son 7 y 2.
   II) Intersecta al eje y en (0, 14).
   III) Su eje de simetría es $x = 4$.

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo I y II
   D) Sólo I y III
   E) I, II y III

3. En el gráfico $f(x) = x^2 - 8x + 15$ (fig. 2), las coordenadas del vértice **P** son

   A) (1, -4)
   B) (3, -5)
   C) (4, -1)
   D) (15, -4)
   E) (15, -8)

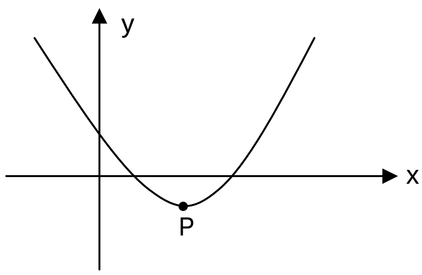


Fig. 2

4. Si los puntos de intersección de la parábola $f(x) = x^2 + bx + c$ con el eje de las abscisas son $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$, entonces las coordenadas del vértice son

A) $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$

B) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

C) $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$

D) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

E) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

5. Con respecto a la función $f(x) = x^2 + 6x + 9$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) Es tangente al eje x.
II) No corta al eje y.
III) Sus ramas se extienden hacia abajo.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) Ninguna de ellas

6. ¿Cuáles deben ser los valores de **a** y **c** para que la parábola de ecuación $y = ax^2 - 4x + c$ tenga su vértice en el punto de coordenadas (1, 2)?

	a	**c**
A)	2	4
B)	2	0
C)	4	4
D)	2	2
E)	4	6

7. En la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, ¿cuál(es) de las proposiciones siguientes es(son) verdadera(s)?

I) Si $b = c = 0$, entonces su eje de simetría es $x = 0$.
II) Si $b = 0$, entonces su vértice es el punto $(0, c)$.
III) Si $c = 0$, la parábola pasa por el origen.

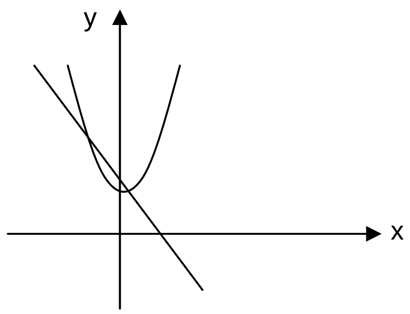
A) Sólo III
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

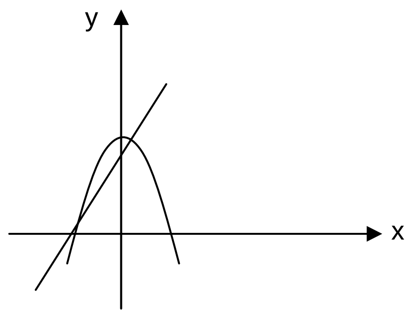
8. Respecto a la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + c$, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

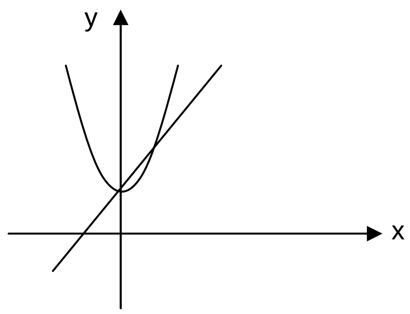
I) Si $c > 1$, no corta al eje x.
II) Si $c \neq 1$, siempre corta al eje x.
III) Si $c > 0$, siempre corta al eje x.

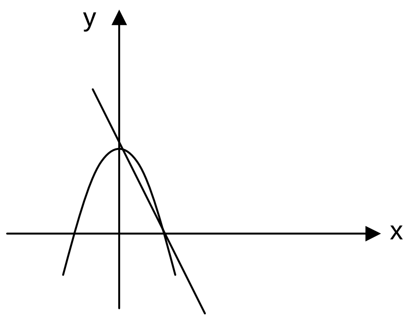
A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) Ninguna de ellas

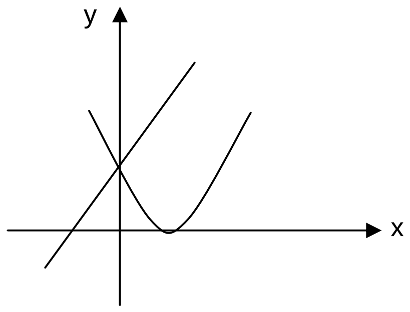
9. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 1$?

A)


B)


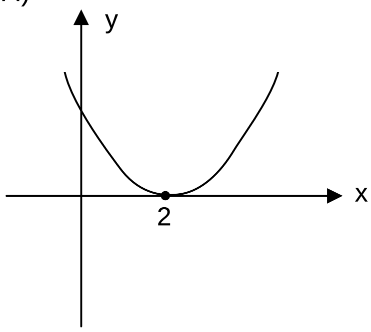
C)


D)


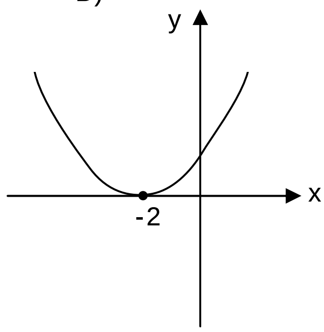
E)


10. ¿Cuál de las gráficas siguientes representa a la función cuadrática $y = 3(x - 2)^2$?

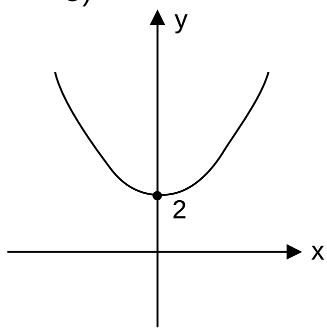
A)

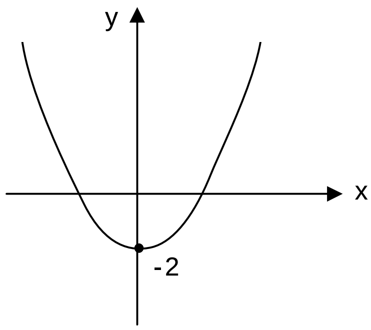


B)

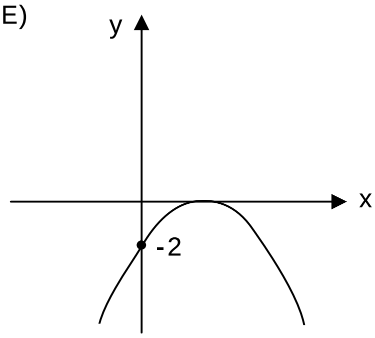


C)





E)



11. El gráfico de la figura 3, que corresponde a la función cuadrática $h(t) = 8t - t^2$ (h = altura en m, t = tiempo en segundos, $0 \leq t \leq 8$), es cierto que:

I) Los ceros de la función son 0 y 8.
II) A 3 segundos corresponde una altura de 12 m.
III) La altura máxima se obtiene a los 4 segundos.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

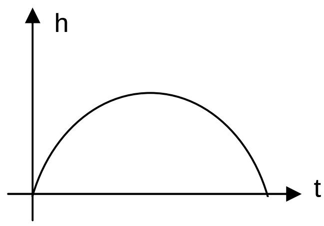
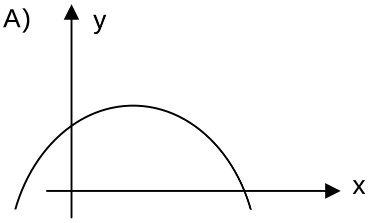
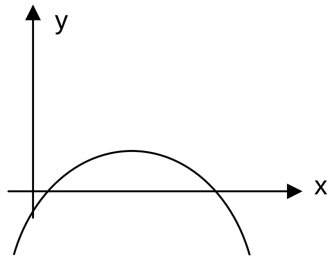
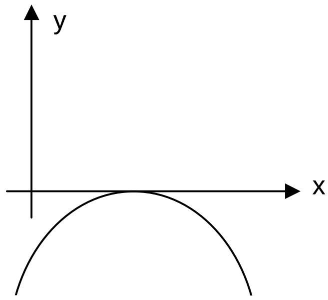


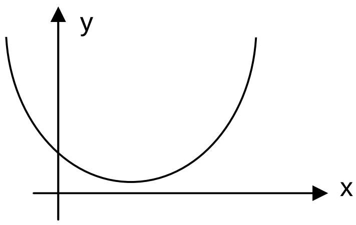
Fig. 3

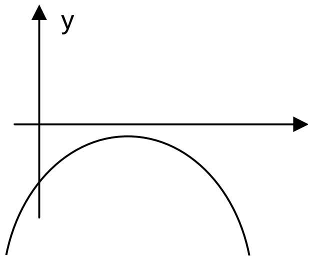
12. Si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, entonces la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ está mejor representada por

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

13. Dadas las funciones cuadráticas de la gráfica (fig. 4), se puede afirmar que:

I) La función 1 es de la forma $y = ax^2 + b$, con $a > 0$ y $b > 0$.

II) La función 2 es de la forma $y = ax^2$, con $a > 0$.

III) La función 3 es de la forma $y = (x - b)^2$, $b \in IR - \{ 0 \}$

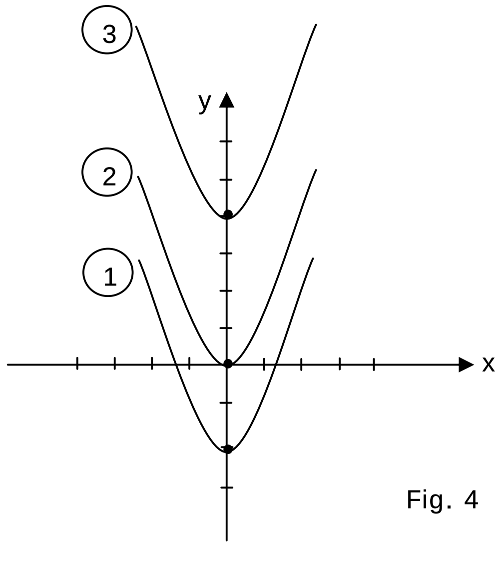


Fig. 4

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

14. Un jugador de Golf intenta alcanzar el green con un lanzamiento en que la pelota describe una trayectoria parabólica. La altura que alcanza esta dada por la función cuadrática $h(t) = -5t^2 + 50t$, donde h es la altura, en metros, alcanzada por la pelota y t es el tiempo, en segundos, desde que es lanzada. ¿Qué altura alcanza la pelota a los 5 segundos de ser lanzada?

A) 50 metros
B) 75 metros
C) 100 metros
D) 125 metros
E) 275 metros

15. La trayectoria de un proyectil está dada por la ecuación $y(t) = 100t - 5t^2$, donde t se mide en segundos y la altura y(t) se mide en metros. Entonces, ¿en cuál(es) de los siguientes valores de t estará el proyectil a 420 m de altura sobre el nivel del suelo?

I) 6 segundos.
II) 10 segundos.
III) 14 segundos.

A) Sólo en I
B) Sólo en II
C) Sólo en III
D) Sólo en I y en II
E) Sólo en I y en III

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2
1	E	B
2	A	
3	E	C
4	E	
5	A	E

CLAVES PÁG. 7

1.	E	6.	A	11.	D
2.	C	7.	E	12.	E
3.	C	8.	A	13.	B
4.	D	9.	C	14.	D
5.	A	10.	A	15.	E