GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 19

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

FACTORIZACIÓN Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

FACTORIZAR

Es el proceso de escribir un polinomio como producto de sus factores.

Factor Común $\boxed{ab + ac = a \cdot (b + c)}$

EJEMPLOS

1. Al factorizar $2x^3y - 8x^2y^2 - 6xy^3$ se obtiene

   A) $x(2x^2y - 8xy^2 - 6xy^3)$
   B) $-6x^6y^6$
   C) $2xy(x^2 - 4xy - 3y^2)$
   D) $x^3y^2(2y^2 - 8xy - 8x^2)$
   E) $2xy(x^2 - 6xy - 3xy)$

2. La factorización de la expresión $(a + b)^2 + 3(a + b)$ es

   A) $(a + b)(a + b + 3)$
   B) $3(a^2 + b^2)$
   C) $(a + b)[3(a + b)]$
   D) $(a - b)(a - b - 3)$
   E) $(a - b)(a - b + 3)$

3. Al factorizar $(3a + b)^2 + 9a^2 - b^2$ se obtiene

   A) $(3a + b)(3a - b)$
   B) $(3a + b)(a - 2b)$
   C) $(3a + b)(2a - b)$
   D) $a(3a + b)$
   E) $6a(3a + b)$

POLINOMIOS DE DOS TÉRMINOS

DIFERENCIA DE CUADRADOS:	$\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)}$
DIFERENCIA DE CUBOS:	$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)}$
SUMA DE CUBOS:	$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)}$

EJEMPLOS

1. Al factorizar $16x^2 - 9y^2$ su resultado es

A) $(4x - 3y)\ (4x - 3y)$
B) $(8x + 3y)\ (8x - 3y)$
C) $xy(16x - 9y)$
D) $(4x - 3y)^2$
E) $(4x + 3y)\ (4x - 3y)$

2. La expresión $a^3 + 1$ es equivalente con

A) $(a - 1)\ (a^2 + a + 1)$
B) $(a + 1)\ (a^2 - a + 1)$
C) $(a - 1)\ (a^2 - a - 1)$
D) $(a + 1)\ (a^2 + a + 1)$
E) $(a + 1)\ (a^2 - 2a + 1)$

3. Uno de los factores de $8z^3 - 1$ es

A) $2z + 1$
B) $2z - 1$
C) $6z^3 + 1$
D) $z - 1$
E) $z + 1$

POLINOMIOS CUADRÁTICOS DE TRES TÉRMINOS

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO: $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

TRINOMIO DE LA FORMA: $\boldsymbol{x^2 + px + q = (x + a)(x + b)}$ **con** $\boldsymbol{p = a + b,\quad q = ab}$

TRINOMIO DE LA FORMA: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = \dfrac{(ax + p)(ax + q)}{a}}$ **con** $\boldsymbol{b = p + q,\quad ac = pq}$

EJEMPLOS

1. Al factorizar $x^2 + 6xy + 9y^2$ se obtiene

   A) $(x^2 + 3)^2$
   B) $(x + 3y)^2$
   C) $(x + 6y)^2$
   D) $(x - 3y)^2$
   E) $(x - 4y)^2$

2. Al factorizar $x^2 - 2x - 15$ se obtiene

   A) $(x + 1)(x - 15)$
   B) $(x - 5)(x - 3)$
   C) $(x - 5)(x + 3)$
   D) $(x + 5)(x - 3)$
   E) $(x + 5)(x + 3)$

3. Al factorizar $6x^2 + 7x + 2$ se obtiene

   A) $(3x - 2)(2x - 1)$
   B) $(3x + 2)(2x - 1)$
   C) $(3x - 2)(2x + 1)$
   D) $(3x + 1)(2x + 2)$
   E) $(3x + 2)(2x + 1)$

POLINOMIOS DE MÁS DE TRES TÉRMINOS

Son aquellos que tienen cuatro o más términos literales; éstos se deben agrupar convenientemente de manera de hacer factorizaciones parciales y llegar a una factorización final.

EJEMPLOS

1. La expresión $y^2 + 3y + 2 + 2x + xy$ es equivalente con

   A) $(2 + y)(x + y + 1)$
   B) $(2 + y)(y + x)$
   C) $y(y^3 + x) \cdot 2(1 + x)$
   D) $(y + 1)^2 + x(2 + y)$
   E) $3y^3 + 3xy + 2$

2. Al factorizar $z^2 – 4 + zx – 2x$ se obtiene

   A) $(z – 2)(z + x + 2)$
   B) $(z – 2)(z + 2)$
   C) $z(z – 4 + x – 2)$
   D) $z(z + x) \cdot 2(2 + x)$
   E) $(z + 2)(z + 2 + x)$

3. La factorización de $4 – (x – 1)^2$ es

   A) $(3 + x)(5 – x)$
   B) $(3 + x)(1 – x)$
   C) $(1 + x)(1 – x)$
   D) $(1 + x)(3 – x)$
   E) Ninguna de las anteriores

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Se llama fracción algebraica a toda expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x) y Q(x) son polinomios. La variable x puede tomar cualquier valor real, siempre que no anule al denominador.

Así por ejemplos:

a) $\frac{3x+2}{x^2-4}$, con $x \neq \pm 2$ b) $\frac{-3x}{2x+6}$, con $x \neq -3$ c) $\frac{x^2+2}{6x+3}$ con $x \neq -\frac{1}{2}$

SIMPLIFICACIÓN DE UNA FRACCIÓN ALGEBRAICA

Para ellos debemos considerar lo siguiente:

a) Si el numerador y el denominador son monomios se cancelan los factores comunes.
b) Si el numerador y/o denominador no son monomios se factoriza el numerador y/o el denominador y se cancelan los factores comunes.

Así por ejemplo

$$\frac{8a^3b^6}{12a^5b^2} = \frac{\cancel{4}\cdot 2\cancel{a^3}\cancel{b^2}b^4}{\cancel{4}\cdot 3\cancel{a^3}\cancel{b^2}a^2} = \frac{2b^4}{3a^2}$$

$$\frac{x^3+2x}{x^2+3x} = \frac{\cancel{x}(x^2+2)}{\cancel{x}(x+3)} = \frac{x^2+2}{x+3}$$

EJEMPLOS

1. $\frac{4a-4b}{2b-2a} =$

A) -2
B) 2
C) 2a
D) 2a – 2b
E) 2b – 2a

2. $\frac{x^2-9}{x^2-7x+12} =$

A) $\frac{-9}{-7x+12}$
B) $\frac{x-3}{x-4}$
C) $\frac{x-9}{x-5}$
D) $\frac{x+3}{x-4}$
E) $\frac{x-3}{x+4}$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

En la adición o sustracción de fracciones algebraicas, tal como en las fracciones numéricas, pueden ocurrir dos casos:

a) Fracciones de igual denominador

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{B}$ son fracciones algebraicas, donde $B \neq 0$, entonces $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$

b) Fracciones de distinto denominador

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son fracciones algebraicas, donde $B \neq 0$ y $D \neq 0$, entonces $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D \pm B \cdot C}{B \cdot D}$

EJEMPLOS

1. $\frac{2x^2 + 5}{x + 3} + \frac{6x - 5}{x + 3} =$

   A) $\frac{2x^2 - 6x - 10}{3 - x}$
   B) $x - 6$
   C) $x - 3$
   D) $2x$
   E) $-2x$

2. $\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} =$

   A) $\frac{a - b}{a + b}$
   B) $\frac{a + b}{a - b}$
   C) $\frac{a + b - 2ab}{a^2 - b^2}$
   D) 1
   E) 0

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son fracciones algebraicas, donde $B \neq 0$ y $D \neq 0$, entonces:

a) La multiplicación $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$

b) La división $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$ $(C \neq 0)$

EJEMPLOS

1. $\frac{y^2 - y}{1 - y} \cdot \frac{y + 1}{y} =$

A) $y + 1$
B) $-y+1$
C) $-(y+1)$
D) y^2
E) 0

2. $\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 - b^2} : \frac{a + b}{a - b} =$

A) $\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2$
B) $\frac{a + b + 2ab}{a - b}$
C) $\frac{a + b}{a - b}$
D) $2ab$
E) 1

EJERCICIOS

1. Al factorizar $m^2 - n^2 - m - n$ se obtiene

A) $(m - n)(m^2 + n^2)$
B) $(m + n)(m - n - 1)$
C) $(m - n)(m - n - 1)$
D) $(m + n)(m - n + 1)$
E) $(m - n)(m - n + 1)$

2. La suma entre el cuadrado del antecesor de un número **x** y el cuadrado de dicho número, disminuido en 1, está representado por

A) $2(x^2 - 1)$
B) $2(x - 1)^2$
C) $(x^2 - 1)2x$
D) $(x - 1)(2x + 2)$
E) $2x(x - 1)$

3. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es(son) factor(es) de la expresión algebraica $x^2 - 7x + 12$?

I) $x - 4$
II) $x - 1$
III) $x - 3$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo II y III
E) Sólo I y III

4. Un globo aerostático vuela con una rapidez de $(n + 8)\frac{km}{hr}$. A esta rapidez, ¿cuánto tiempo, en horas, le tomará volar $(n^2 + 5n - 24)$ km?

A) $n + 3$
B) $n - 3$
C) $(n - 3)(n + 8)^2$
D) $n + 16$
E) $n - 16$

5. Si $p \neq 0$, entonces $\frac{1}{p^3} - \frac{1+p^2}{p^5} =$

A) $\frac{2p^2 - 1}{p^5}$

B) $-\frac{1}{p^5}$

C) $\frac{1}{p^3}$

D) 0

E) $\frac{1}{p^5}$

6. Al efectuar la suma $\frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} + \frac{a}{bc}$ con $abc \neq 0$, se obtiene

A) $\frac{a + b + c}{ab + ac + bc}$

B) $\frac{a + b + c}{abc}$

C) $\frac{a + b + c}{a^2b^2c^2}$

D) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

E) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2}$

7. La expresión $1 - p^6$ es equivalente a

A) $(1 - p^3)(1 - p^2)$
B) $p^3(1 - p^2)$
C) $(1 - p^3)(1 + p^3)$
D) $(1 - p^3)^2$
E) $(1 - p^2)^3$

8. Al dividir la fracción $\frac{m - n}{m}$ por $\frac{n^2 - m^2}{mn}$, con $mn \neq 0$, se obtiene

A) $\frac{(m-n)(n^2 - m^2)}{m^2n}$

B) $\frac{n}{n + m}$

C) $\frac{-n}{m + n}$

D) $\frac{n + m}{n}$

E) $\frac{-n - m}{n}$

9. La fracción $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{4 - x^2}$, con $x \neq \pm 2$, es igual a

A) $-2x + 8$
B) $\dfrac{-x - 4}{x + 2}$
C) $\dfrac{x + 2}{x - 4}$
D) $\dfrac{x - 4}{x + 2}$
E) $\dfrac{4 - x}{x + 2}$

10. Si $ab \neq 0$, entonces $\dfrac{\dfrac{2a}{b} - \dfrac{2b}{a}}{1 - \dfrac{a}{b}} =$

A) $2 - \dfrac{2b}{a}$
B) $\dfrac{2a + 2b}{a}$
C) $\dfrac{2a + 2b}{-a}$
D) $\dfrac{2a - 2b}{a(1 - a)}$
E) $\dfrac{-2}{a}$

11. Para $xy \neq 0$, $\dfrac{\dfrac{x}{y} - \left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}} =$

A) $\dfrac{-x - y}{xy}$
B) $x + y$
C) $x - y$
D) $-x - y$
E) -1

12. Para $x \neq \pm 5$, $\dfrac{x + 3}{x - 5} - \dfrac{8x - 40}{x^2 - 25} =$

A) $\dfrac{x^2 - 8x - 25}{x^2 - 25}$

B) $\dfrac{-7x - 37}{-x^2 + x + 20}$

C) $\dfrac{x^2 + 55}{x^2 - 25}$

D) $\dfrac{x + 5}{x - 5}$

E) 1

13. Si **a** y **b** son números enteros positivos, la expresión $\dfrac{a^2 + b}{a}$ representa a un número entero si:

(1) $a^2 + b$ es número entero.

(2) $\dfrac{b}{a}$ es un número entero.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

14. El trinomio $x^2 + nx + c$ es cuadrado de binomio si:

(1) $c = \left(\dfrac{n}{2}\right)^2$

(2) $c = \dfrac{1}{4}$ y $n = -1$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

15. Se puede determinar el valor de $\frac{t^2 + 10}{5t}$ si:

(1) El 20% de t es 4.

(2) El cuadrado de t es 400.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3
1	C	A	E
2	E	B	B
3	B	C	E
4	A	A	D
5	A	D	
6	D	A	
7	C	E	

CLAVES PÁG. 8

1. B	6. D	11. D
2. E	7. C	12. C
3. E	8. C	13. B
4. B	9. E	14. D
5. B	10. C	15. A