GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 27

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de **segundo grado** es una ecuación susceptible de llevar a la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, con **a**, **b** y **c** coeficientes reales y $\mathbf{a \neq 0}$**.**

EJEMPLOS

1. ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones es(son) de segundo grado?

I) $x^2 - \sqrt{5} = 0$
II) $(x + 1)^2 = 3 - x^2$
III) $(x + 1)^2 = (x - 1)^2$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II y III

2. Al escribir la ecuación $3(x - 2)^2 = (2 - x)^2 - 1$ en la forma $ax^2 + bx + 1 = 0$, ¿cuál es el valor de **a**?

A) 8
B) 2
C) 1
D) $\frac{5}{9}$
E) $\frac{2}{9}$

3. ¿Qué valores deben tener los coeficientes de la ecuación en **x**, $(a - 1)x^2 + (b + 3)x + c = 0$, para que sea de segundo grado?

A) $a = 1$; $b = 3$ y $c = 0$
B) $a = 1$; b y c cualquier real
C) $a \neq 1$; b y c cualquier real
D) $a \geq 1$; $b \neq 3$ y c cualquier real
E) a ; b y c cualquier real

Una ecuación de segundo grado **siempre** tiene dos soluciones (o raíces). Estas soluciones (o raíces) se las designa por α y β, o bien, por $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$.
El cálculo de las soluciones (o raíces) de una ecuación de segundo grado, dada en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se realiza aplicando la siguiente fórmula:

$$\boxed{\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

OBSERVACIÓN: Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se factoriza, para determinar las soluciones, se aplica la propiedad siguiente:

$$\boxed{\mathbf{m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ó } n = 0}}$$

EJEMPLOS

1. ¿Cuáles son las soluciones (o raíces) de la ecuación $3x^2 - 2x - 5 = 0$?

A) $-\frac{10}{3}$ y 2
B) -5 y 3
C) -2 y $\frac{10}{3}$
D) $-\frac{5}{3}$ y 1
E) -1 y $\frac{5}{3}$

2. La ecuación $2(x^2 - 6) = -2x$ tiene como conjunto solución

A) $\{\sqrt{6}, 0\}$
B) $\{2, \sqrt{6}\}$
C) $\{3, -2\}$
D) $\{2, -3\}$
E) $\{-2, -3\}$

3. Dada la siguiente ecuación de segundo grado $(x - \sqrt{5})(x + 3) = 0$. Entonces, el conjunto solución es

A) $\{\sqrt{5}, 3\}$
B) $\{\sqrt{5}, -3\}$
C) $\{-\sqrt{5}, 3\}$
D) $\{\sqrt{5} - 3, \sqrt{5} + 3\}$
E) $\left\{\frac{\sqrt{5}-3}{2}, \frac{\sqrt{5}+3}{2}\right\}$

Dada la ecuación de segundo grado en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se llama **Discriminante** de ella (se simboliza por Δ), al número real $\mathbf{b^2 - 4ac}$.

Dependiendo del discriminante, las soluciones (o raíces) de una ecuación de segundo grado pueden ser:

a) Reales y distintas , si $\Delta > 0$
b) Reales e iguales , si $\Delta = 0$
c) No tiene raíces reales , si $\Delta < 0$

EJEMPLOS

1. ¿Cuál es la discriminante de la ecuación $5x - 17 = (x + 3)(x - 3)$?

A) -57
B) - 7
C) 57
D) 7
E) $\sqrt{7}$

2. Con respecto a la ecuación de segundo grado $x^2 - kx + 2 = 0$, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

I) Si $k = 2$, no tiene raíces reales.
II) Si $k = -2$, las raíces son reales e iguales.
III) Si $k = 3$, las raíces son reales y distintas.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

3. ¿Cuál es el mayor valor entero que puede tomar **k** en la ecuación cuadrática $2x(kx + 2) + 1 + x^2 = 0$ para que ella tenga raíces reales?

A) -1
B) 0
C) 1
D) 2
E) 3

Si α y β son las soluciones (o raíces) de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, entonces **siempre** se cumple que:

1) $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$	2) $\alpha \cdot \beta = \dfrac{c}{a}$

y la ecuación se puede obtener aplicando la fórmula: $\boxed{x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha \cdot \beta) = 0}$

EJEMPLOS

1. ¿Cuál es la suma de las soluciones (o raíces) de la ecuación $5x^2 + 10x + 1 = 0$?

A) $-\frac{1}{5}$
B) $\frac{1}{5}$
C) -2
D) 2
E) $\frac{1}{2}$

2. ¿Cuál es el producto de las soluciones (o raíces) de la ecuación $5(x - 1)^2 = 4(1 - x)$?

A) $-\frac{1}{5}$
B) $\frac{6}{5}$
C) $-\frac{3}{5}$
D) $\frac{1}{5}$
E) $\frac{3}{5}$

3. Una ecuación de segundo grado cuyas raíces, x_1 y x_2, satisfacen las igualdades $3(x_1 + x_2) = 2$ y $6x_1 \cdot x_2 = 5$ es

A) $3x^2 - 2x + 10 = 0$
B) $3x^2 + 4x + 5 = 0$
C) $6x^2 + 4x - 5 = 0$
D) $6x^2 - 4x + 10 = 0$
E) $6x^2 - 4x + 5 = 0$

PROBLEMAS DE PLANTEAMIENTO

Existen numerosas situaciones problemáticas que se resuelven mediante ecuaciones de segundo grado. Así por ejemplo, se tiene problemas de dígitos, problemas de edades, aplicaciones a la geometría y otros.

EJEMPLOS

1. En la circunferencia de la figura 1, $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$ son dos secantes que la cortan en Q y T respectivamente. Si $\overline{PQ} = 5$ y $\overline{TS} = 2$ y la parte externa de la secante $\overline{PS}$ tiene una unidad menos que la cuerda que determina la otra secante, entonces la ecuación que nos permite calcular la medida **x** de la cuerda $\overline{QR}$, usando la propiedad $\overline{PR} \cdot \overline{PQ} = \overline{PS} \cdot \overline{PT}$, es

   A) $x^2 - 5x - 26 = 0$
   B) $x^2 - 5x + 24 = 0$
   C) $x^2 + 5x - 26 = 0$
   D) $x^2 - x + 24 = 0$
   E) $x^2 - 5x - 24 = 0$

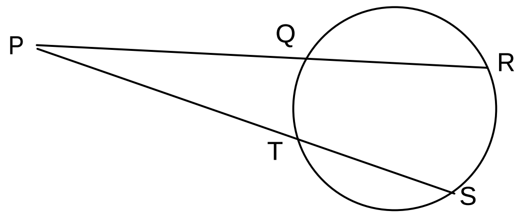

Fig. 1

2. Se tienen 14 m lineales de reja para cerrar el antejardín rectangular de una casa. El frontis de la casa es uno de los lados del jardín. ¿Cuál es la longitud de la reja que queda en el frente de la casa, si el área del jardín es 24 m^2?

   A) 3 m
   B) 4 m
   C) 6 m
   D) 12 m
   E) 24 m

3. En una lámina metálica rectangular se cortaron, en las 4 esquinas, cuadrados congruentes como lo indica la figura 2, quedando una superficie de 320 cm^2. ¿Cuál es la medida del lado de cada cuadrado?

   A) 2 cm
   B) 4 cm
   C) 5 cm
   D) 6 cm
   E) 8 cm

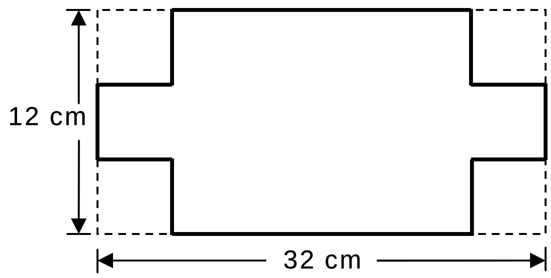

Fig. 2

EJERCICIOS

1. ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones es(son) de segundo grado?

   I) $x^2 + x = 3 + 2x$
   II) $5x - x^2 = 4x + 7 - x^2$
   III) $2x^2 = 3$

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo III
   D) Sólo I y III
   E) I, II y III

2. ¿Qué valor debe tener **k** en la ecuación $3x^2 - 5kx - 2 = 0$, para que una de sus raíces sea -2?

   A) 0
   B) 1
   C) - 1
   D) -20
   E) - 4

3. Las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x\sqrt{5} - 4 = 0$ son

   A) $3 - \sqrt{5}$ y $3 + \sqrt{5}$
   B) $3 - \sqrt{5}$ y $-3 - \sqrt{5}$
   C) $1 - \sqrt{5}$ y $1 + \sqrt{5}$
   D) $1 - \sqrt{5}$ y $-1 - \sqrt{5}$
   E) $3 - 2\sqrt{5}$ y $3 + 2\sqrt{5}$

4. De la ecuación $x^2 – 11x + 28 = 0$, se puede deducir que

   A) Las soluciones se diferencian en 4 unidades
   B) Las soluciones son números impares consecutivos
   C) La razón entre las soluciones es 2 : 3
   D) El producto de las soluciones es -28
   E) La diferencia positiva entre las soluciones es tres

5. Si el discriminante de la ecuación $3x^2 - 2x + k = 0$ es 64, entonces ¿cuál es el valor de **k**?

A) $-\frac{17}{3}$
B) $\frac{1}{3}$
C) -5
D) 5
E) $\frac{17}{3}$

6. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s), respecto a la naturaleza de las soluciones (o raíces) de la ecuación: $k \cdot x^{-2} + 2 \cdot x^{-1} + 2 = 0$?

I) Si $k < \frac{1}{2}$, las raíces son reales y distintas.
II) Si $k > \frac{1}{2}$, no tiene raíces reales.
III) Si $k = \frac{1}{2}$, las raíces son reales e iguales.

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

7. Una ecuación de segundo grado cuyas raíces son $\alpha = 2 + \sqrt{5}$ y $\beta = 2 - \sqrt{5}$, es

A) $x^2 - 4x - 1 = 0$
B) $x^2 - 4x + 1 = 0$
C) $x^2 - 5x + 1 = 0$
D) $x^2 - 5x - 1 = 0$
E) Ninguna de las anteriores

8. Respecto de la ecuación $7x - 12 - x^2 = 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) La suma de sus raíces es 7.
II) El producto de sus raíces es 12.
III) Ambas raíces son positivas.

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

9. Si el producto de las raíces (o soluciones) de la ecuación en **x**, $kx^2 + (2k + 1)x - k + 3 = 0$ es igual a 4, entonces **k** =

A) 1

B) $\frac{3}{5}$

C) $-\frac{3}{5}$

D) $-\frac{1}{6}$

E) $\frac{1}{6}$

10. Si α y β son las soluciones (o raíces) de la ecuación $x^2 - px + q = 0$, entonces la expresión $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ =

A) pq

B) $-pq$

C) $p + q$

D) $p - q$

E) $-p - q$

11. El mayor de los lados de un rectángulo es 7 metros más largo que el lado de un cuadrado, y el lado menor es 7 metros más corto que el lado del mismo cuadrado. Si la suma de las áreas del rectángulo y del cuadrado es 113 m^2, entonces el lado del cuadrado mide

A) 1 m
B) 2 m
C) 7 m
D) 8 m
E) 9 m

12. Un segmento AB de 10 cm está dividido por un punto H (fig. 1), tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$.
Entonces, el segmento AH mide

A) 5 cm
B) $(10\sqrt{5} - 10)$ cm
C) $(15 - 5\sqrt{5})$ cm
D) $(5\sqrt{5} - 5)$ cm
E) $(15 + 5\sqrt{5})$ cm

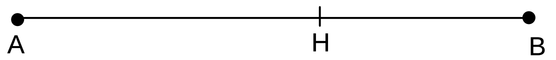

Fig. 1

13. La circunferencia de la figura 2, tiene centro O y radio 3. La secante $\overline{SB}$ la corta en A y es tal que $\overline{SB} = \overline{SO}$. Si $\overline{SA} = 2$, ¿cuál es la medida de la secante $\overline{SB}$?

A) $\sqrt{10} - 1$
B) $\sqrt{10} + 1$
C) $\sqrt{6} + 1$
D) $2\sqrt{10} + 2$
E) 3,5

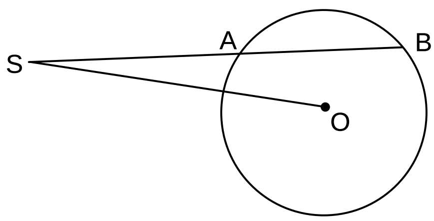

Fig. 2

14. En el computador se necesita reproducir una fotografía rectangular cuyo largo es 10 cm mayor que el ancho. ¿Cuáles son las medidas del largo y el ancho?

(1) El área de la fotografía es 600 cm^2.

(2) El perímetro de la fotografía es 100 cm.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

15. En el rectángulo ABCD de la figura 3, la región sombreada corresponde a una franja de ancho constante igual a 3 m. Se puede calcular el perímetro del rectángulo ABCD si:

(1) Se conoce el área del rectángulo ABCD.

(2) Se conoce el área de la región sombreada.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

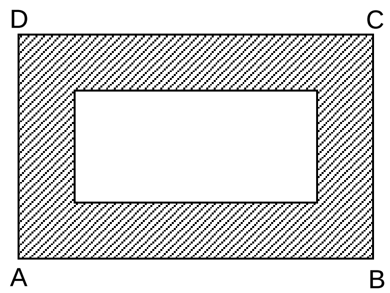

Fig. 3

RESPUESTAS

Ejemplos / Págs.	1	2	3
1	D	E	C
2	E	D	B
3	B	D	C
4	C	D	E
5	A	C	B

CLAVES PÁG. 6

1. D	6. E	11. E
2. C	7. A	12. D
3. B	8. E	13. B
4. E	9. B	14. D
5. C	10. A	15. B